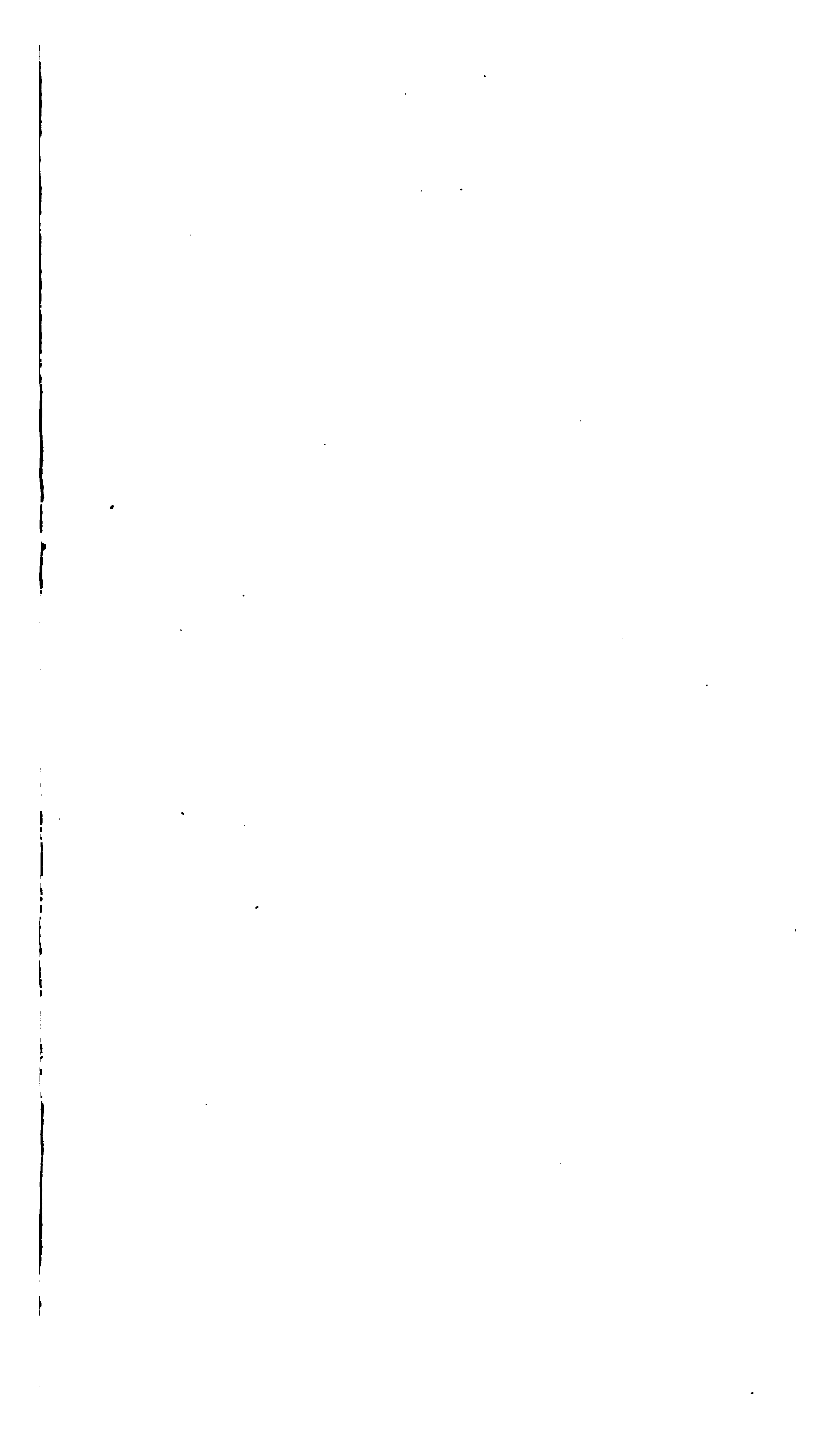

SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ
Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven
of Portsmouth, N.H.
(Class of 1842.)
Rec. Dec. 2. 1851.







Theorie

der

independenten Darstellung

der

höhern Differentialquotienten.

Theorie

der

independenten Darstellung

der

höhern Differentialquotienten.

Von

Reinhold Hoppe.

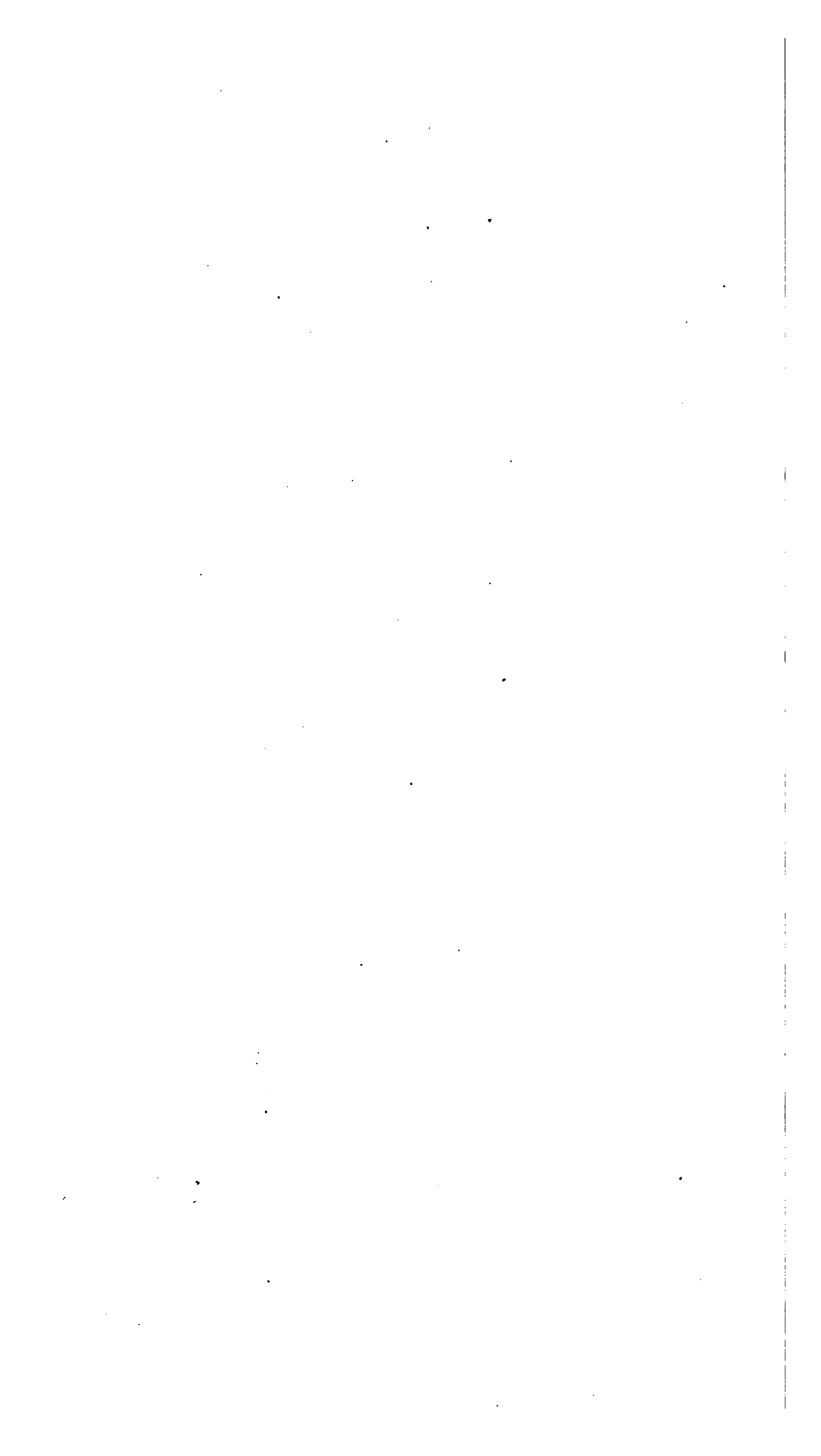
Leipzig, 1845.
Verlag von Joh. Ambr. Barth.

Dem Herrn Professor

D. Scherk

in dankbarer Verehrung gewidmet

vom Verfasser.



Vorrede.

Da die vorliegende Arbeit aus keinem sich selbst herausstellenden oder irgendwo zur Sprache gekommenen Bedürfnisse hervorgegangen, sondern bloss durch eine zufällige Entdeckung, welche ich dann weiter verfolgte, veranlasst worden ist, und sie demnach jeder Berufung auf eine geschehene Anregung oder Aufmunterung entbehrt: so möchten wohl einige Worte über den Gegenstand selbst, sowie über die Art seiner Behandlung zur Erläuterung der Motive, welche mich bei ihrer Veröffentlichung leiteten, nicht überflüssig sein. Was zunächst den Gegenstand betrifft, so schien mir die Bedeutung der höhern Differentialquotienten in der Lehre von den bestimmten Integralen und den Reihen, ihre Anwendung zum Ausdruck der erstern, und zur Summation und Coefficientenbestimmung der letztern, namentlich in Rücksicht auf den Taylor'schen Lehrsatz, vor Allem jedoch die Hervorrufung der verschiedenartigsten Untersuchungen, welchen eine erleichterte und allgemeinere Herleitung ihrer independenten Ausdrücke ein neues Feld im Gebiete der Reihen eröffnet, ihm einen hinreichenden Grad von Wichtigkeit zu geben, um die Voraussetzung eines allgemei-

nern Interesses zu rechtfertigen. Ganz besonders hatte ich hierbei die grosse Menge zum Theil sehr vereinzelt vorkommender, auf Summation und Umformung endlicher Reihen bezüglicher Sätze und Formeln im Auge, welche schon als solche um ihrer durch alle Theile der Analysis verbreiteten Anwendung willen wichtig sind, es jedoch noch mehr werden würden, wenn man sie zu einem Ganzen vereinigte, ihren innern Zusammenhang an's Licht brächte, und die sich darauf gründende Lehre so viel als möglich erweiterte und verallgemeinerte. Zur Gestaltung der letztern würde die vorliegende Theorie einerseits reichlichen Stoff und neue Gesichtspunkte liefern, aber auch andererseits von ihr einen Vorrath von Mitteln zur eigenen weitern Ausbildung empfangen, so dass beide die Aussicht gewährten, durch gegenseitige Vervollkommnung immer mehr an Bedeutung zu gewinnen.

Alle bisher angeführten Punkte sind wohl zu jeder Zeit anerkannt worden; diess beweisen die Bemühungen mehrerer Mathematiker, die zu verschiedenen Zeiten independente Ausdrücke für höhere Differentialquotienten, öfters mit Aufwand von scharfsinnigen Mitteln, aufgesucht, und theilweise davon den angegebenen Gebrauch gemacht haben. Dass man indessen nicht so viel Werth darauf gelegt hat, um ernstlich an eine weitere Ausdehnung solcher Untersuchungen zu denken, und namentlich eine allgemeine Deductionsmethode zu suchen, mag wohl darin seinen Grund haben, dass die complicirte Gestalt der erhaltenen Ausdrücke dieselben oft zur Anwendung ungeschickt zu machen scheint. Indem mir daher die oben erwähnte Entdeckung ein Mittel an die Hand gab, eine allgemeine Methode zur Herleitung solcher Ausdrücke zu finden, so war ich, da ich die Ansicht von ihrer Un-

brauchbarkeit nicht theilte, darauf bedacht, die Rechnung mit dergleichen Ausdrücken, welche einer bedeutenden Abkürzung fähig ist, auf bestimmte Principien zu bringen. Diese habe ich in der in der Einleitung enthaltenen Theorie des Summenzeichens aufgestellt, und glaube durch die im Verlaufe der Schrift angedeutete Anwendung derselben die Aussicht zu rechtfertigen, dass man nach gehöriger Ausbildung der oben erwähnten Theorie der Umformung endlicher Reihen, nicht nur im Stande sein werde, die bekannten Eigenschaften von Grössen, wie z. B. den Bernoulli'schen Zahlen eben so kurz, als es bisher auf anderm Wege geschehen ist, aus ihren independenten Ausdrücken herzuleiten, sondern auch dieselben zur Entwickelung neuer Eigenschaften zu benutzen.

In der Theorie des Summenzeichens habe ich keine wesentlich neuen Begriffe eingeführt, bin vielmehr nur in einem Stücke vom gewöhnlichen Gebrauche abgegangen, indem ich die beigefügten Grenzen nicht als ganze Zahlen, sondern als beliebige reelle Grössen gefasst habe; eine Aenderung, deren Grund vielleicht nicht augenblicklich erhellt, die jedoch bei ausgedehnterem Gebrauche manchen Uebelstand beseitigt.

Was nun die Behandlung des Gegenstandes selbst betrifft, so war zwar die Mittheilung der Idee der vorherrschende Zweck, doch habe ich ihrer Ausführung eine so weit fertige Gestalt zu geben versucht, als es in meinen Kräften stand, und namentlich in zweierlei Hinsicht auf Vollständigkeit gesehen. Einerseits nämlich bestand diese in der Berücksichtigung aller möglichen Fälle bei der Lösung der gestellten Aufgabe. Da indessen die Form der Resultate derselben, wenn gleich aus gemeinschaftlicher Quelle entsprungen, doch insofern eine bloss

zufällige war, als sich neben ihr noch viele andere denken liessen, zu deren Erschöpfung keine Aussicht vorhanden war, so musste andererseits wenigstens durch Aufnahme aller bekannten abweichenden Ausdrucksformen eine gewisse Vollständigkeit erstrebt werden. Hieraus entstand der zweite, mehr historische, Theil der Abhandlung, den ich jedoch durch einige eigene Untersuchungen vermehrt, und, wo es angieng, mit der Theorie in Verbindung gesetzt habe. Aus demselben Gesichtspunkte habe ich schon im ersten Theile auf Umformung und Vervielfältigung der Ausdrücke hingearbeitet, bald durch Einführnng willkührlicher Grössen, bald durch Aufstellung mehrerer Formeln für einen Zweck, welche überflüssig gewesen wären, hätte es sich nur darum gehandelt, für jede Function eine Formel zu liefern. Manche der angewandten Mittel zur allgemeinen Durchführung des Planes sind noch Nothbehelf, und es werden sich viele Punkte finden, wo eine Verbesserung oder Erweiterung zu wünschen wäre; möchten diese Mängel, die ich keineswegs zu verbergen gesucht habe, nur die Veranlassung sein, dass sich bessere Kräfte demselben Gegenstande zuwenden.

Es lag in der Tendenz der gestellten Aufgabe, den Anwendungen von Principien der Combinationslehre und der Differenzenrechnung entgegenzuarbeiten; aus diesem Grunde habe ich, ob sich gleich viele Punkte darboten, an sie anzuknüpfen, eine strenge Sonderung von beiden Disciplinen beobachtet.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Um den Sinn der Aufgabe, um deren Lösung es sich handelt, gleich von Anfang in's rechte Licht zu stellen, und von aller Zweideutigkeit zu befreien, mögen einige kurze Bemerkungen über ihr Verhältniss zu den verwandten Aufgaben der Analysis vorausgehen. Sie schliesst sich zunächst an die Elemente der Differenzialrechnung an, wo ebenfalls, jedoch in mehrfacher Weise, von höhern Differenzialquotienten gehandelt wird. Hier bleibt für's Erste alles von der Betrachtung ausgeschlossen, was sich auf ihren Gebrauch und ihre Eigenschaften bezieht; wir werden es allein mit der Bestimmung ihrer Werthe, mit der Auffindung ihrer Ausdrücke zu thun haben, aber auch diess nur in einem bestimmten Sinne. In den Elementen der Differenzialrechnung wird nämlich nicht nur gezeigt, wie man die Differentialquotienten jeder Ordnung von jeder Function durch wiederholte Differenziation finden könne, sondern auch Beispiele von Functionen gegeben, deren höhere Differenzialquotienten sich allgemein in völlig entwickelter Form ausdrücken lassen; z. B.:

$$\frac{d^n \cdot a^x}{dx^n} = a^x (la)^n.$$

Demnach kann man von der genannten Bestimmung zwei Arten unterscheiden, die successive Ableitung und den unmittelbaren allgemeinen Ausdruck mittelst einer Formel. Die erstere ist als eine bereits vollständig gelöste Aufgabe zu betrachten; mithin kann sich unsere Untersuchung nur auf die zweite Art beziehen, welche

zu jener in dem Verhältnisse steht, dass sie die an sich nur speciellen Resultate derselben unter einer allgemeinen Form vereinigt. Diese Verallgemeinerung ist jedoch noch einseitig; denn sie beschränkt sich auf den Ordnungsexponenten der Differenziation, während sie, um vollständig zu sein, sich auch auf die möglichen Formen der zu differenziirenden Function erstrecken müsste. Es handelt sich also darum, die auf die einzelnen Functionen bezüglichen Formeln, wenn nicht unter eine, doch unter eine begrenzte Anzahl solcher zu vereinigen. Nur dadurch wird eine Theorie der in Rede stehenden Rechnungsart möglich, die sie bis jetzt noch nie gehabt hat. In Betreff der erstern Disjunction giebt es zwischen beiden Bestimmungsarten eine dritte, die zwar allgemein, aber nicht unmittelbar ist, nämlich die recurrirende. Bei der Erforschung des Gesetzes, wonach sich die Ausdrücke der höheren Differenzialquotienten in der successiven Ableitung bilden, fällt nämlich meistens bald eine bleibende Form ihrer veränderlichen Elemente in die Augen, während das Bildungsgesetz der numerischen Coefficienten bei weitem schwerer zu entdecken ist. So wird man z. B. leicht erkennen, dass die Grösse

$$\frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{1+x^3}$$

entwickelt die Form hat:

$$\frac{Ax^{2n} + Bx^{2n-3} + Cx^{2n-6} + \ldots}{(1+x^3)^{n+1}}$$

Nun lassen sich zwar die Coefficienten A, B, C, ... schwer in völlig entwickelter Form ausdrücken, dagegen sehr leicht durch Relationen so bestimmen, dass sie für jeden besondern Werth von n einzeln gefunden werden können. Sie sind, wie man sieht, im Allgemeinen Functionen mehrerer ganzer Zahlen, für unsern Fall kann man setzen $A = f(n, 1)$, $B = f(n, 2)$, $C = f(n, 3)$ etc., und eine Relation der genannten Art wird durch eine Gleichung zwischen verschiedenen Werthen der Function $f(n, m)$ ausgedrückt sein, etwa, um es an einem möglichst einfachen Beispiele zu zeigen,

$$f(n, m) = mf(n-1, m) + nf(n, m-1).$$

Eine solche Gleichung heisst eine recurrirende, weil sie die gesuchte Function auf ihre nächst vorhergehenden Werthe zurück-

führt, daher man diese mittelst derselben durch wiederholte Anwendung in jedem speciellen Falle — bisweilen auch allgemein, wie in unserm Beispiele — auf f (0, 0) zurückführen kann.

$$f(n, m) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m+n) f(0, 0).$$

Gewöhnlich reicht eine einzige recurrirende Gleichung nicht zur Bestimmung der Function hin, sondern es müssen mehrere gegeben sein. Im Gegensatz zu der Bestimmung durch recurrirende Gleichungen heisst nun der allgemeine Ausdruck der Function, welcher das Zeichen derselben nicht mehr enthält, independent. Um also die recurrirende Bestimmungsform, welche für unsern Zweck nicht genügt, auszuschliessen, müssen wir die Forderung hinzufügen, dass die allgemeinen Ausdrücke der höhern Differenzialquotienten independent seien. Will man indessen den eigentlichen Sinn dieser Beschränkung festhalten, so kann dies nicht ohne eine neue geschehen. Der Begriff eines independenten Ausdrucks lässt sich möglicherweise so weit ausdehnen, dass der wesentliche Unterschied verschwindet, und nur das äusserliche Merkmal der Schreibart übrig bleibt. Man kann nämlich jede recurrirende Gleichung auch so schreiben, dass man die unbekannte Function einem Ausdrucke gleich setzt, in welchem man durch irgend eine abkürzende Bezeichnung das ganze Substitutionsverfahren andeutet, welches in jedem Falle den gesuchten Werth zu geben geeignet ist. Ein solcher Ausdruck ist independent, und hat doch keinen andern Sinn als die recurrirende Gleichung selbst, hat auch in der Anwendung nichts vor dieser voraus. Wir dürfen daher bei dem äusserlichen Unterscheidungsmerkmal nicht stehen bleiben, sondern müssen uns vergegenwärtigen, welcher Eigenschaft die independente Ausdrucksform ihre eigenthümliche Brauchbarkeit verdankt. Diese Eigenschaft ist keine andere, als dass das Bildungsgesetz der Ausdrücke ein abgeschlossenes ist, d. h. dass alle beim Wachsen der veränderlichen Zahl n hinzutretenden Elemente des Ausdrucks nach demselben unveränderlichen Gesetze entstehen, welches schon für die niedern Werthe von n sich kenntlich ausdrückt. Im Gegensatz dazu ist das Bildungsgesetz der aus recurrirenden Gleichungen durch blosse Substitution abgeleiteten Ausdrücke ein prägnantes, d. h. in jedem Elemente eines solchen liegt der Keim einer neuen Entwickelung nach einem neuen Gesetze. Dieser Unter-

schied musste besonders deshalb hervorgehoben werden, weil in der combinatorischen Analysis Ausdrücke von prägnantem Bildungsgesetz vorkommen, die man, da sie dort ihre Geltung haben, auch zur independenten Bestimmung der höhern Differenzialquotienten angewandt hat; mit den dahin gehörigen Formeln haben wir es also nicht zu thun. Nun scheint es allerdings zugleich schwer und nothwendig zu sein, eine bestimmte Grenzlinie zwischen beiden Formen zu ziehen. Nothwendig ist es jedoch nur, wenn man den gewöhnlichen Weg einschlägt, nämlich den independenten Ausdruck aus den recurrirenden Gleichungen abzuleiten; denn dann muss man aus der einen Form in die andere übergehen. Wir werden indessen diese Schwierigkeit umgehen, indem wir Mittel finden; ohne die letztern zum Zweck zu gelangen. So nämlich können wir gleich von Anfang eine bestimmte, einfache Ausdrucksform zu Grunde legen, über deren Bildungsgesetz sich leicht entscheiden lässt, die jedoch nicht zu eng begrenzt sein darf, um bis auf jeden beliebigen Grad complicirte Abhängigkeitsarten umfassen zu können. Diesen Bedingungen genügt vollkommen die Entwickelung der zu bestimmenden Grössen in endliche Reihen, die nach constantem Gesetze ununterbrochen fortschreiten. Diese Ausdrucksform, so bekannt und so häufig gebraucht sie auch ist, können wir gleichwohl nicht in der Kürze hinreichend erläutern, sondern wir müssen sie, um der ausgedehnten und den gewöhnlichen Gebrauch überschreitenden Anwendung willen, die wir davon machen werden, einer besondern Betrachtung unterwerfen; daher wir auch die Begründung des eben Gesagten nicht sogleich folgen lassen, sondern später darauf zurückkommen wollen. Die Begrenzung unserer Aufgabe können wir hiermit als beendet ansehen: sie enthält, den bisher erläuterten Bestimmungen gemäss, die Forderung, die höhern Differenzialquotienten — nicht durch successive Ableitung, sondern in allgemeinen Ausdrücken — nicht für verschiedene Functionen durch ebenso viele Formeln, sondern, so weit es sich ausdehnen lässt, für alle Functionen durch eine bestimmte Anzahl von Formeln oder Sätzen — nicht mittelst recurrirender Gleichungen, sondern independent — und überdiess so zu entwikkeln, dass das Bildungsgesetz der Ausdrücke nicht prägnant, sondern von Anfang an abgeschlossen ist. Alles, was von früher bekannten Resultaten in diesem Sinne die Aufgabe theilweise zu

lösen geeignet ist, soll nach Beendigung ihrer allgemeinen Lösung mit aufgenommen werden, wobei wir natürlich von der zweiten Beschränkung, die sich nur auf die letztere bezieht, absehen müssen.

Da die Reihen, deren Summen die gesuchten Grössen auszudrücken bestimmt sind, oft sehr complicirt ausfallen werden, so wird uns eine Abkürzung unentbehrlich, die jedoch nicht bloss als Nothbehelf dienen, sondern der Kürze, Deutlichkeit und Consequenz der Darstellung bedeutend förderlich sein soll, die wir daher für alle Fälle beibehalten werden, ohne fürchten zu müssen, einen andern bemerkenswerthen Uebelstand dadurch herbeizuführen. Es ist bekannt, dass man, um die Summe einer Reihe abkürzend zu bezeichnen, vor deren allgemeines Glied das Zeichen $\sum$ setzt, und den Anfang und das Ende der Reihe besonders andeutet; auch ist klar, dass hierdurch das Fortschreitungsgesetz derselben deutlicher ausgedrückt wird, als durch die vollständige Schreibart. Gleichwohl glaube ich aus dem Umstande, dass man diese Bezeichnung in der Rechnung gewöhnlich wieder fahren lässt, schliessen zu dürfen, dass man den Nutzen derselben, der eben in der Rechnung am grössten ist, noch nicht in seiner ganzen Ausdehnung erkannt hat. Aus diesem Grunde hielt ich es für angemessen, eine Theorie des Summenzeichens vorauszuschicken, und dadurch zu zeigen, wie sich alle algebraischen Operationen mit Summen endlicher Reihen, die überhaupt allgemein ausführbar sind, nicht allein mit Beibehaltung der genannten Abkürzung bewerkstelligen, sondern auch auf ganz leichte Operationen zwischen den allgemeinen Gliedern und zwischen den Grenzgleichungen zurückführen lassen. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Theorie des Summenzeichens, welche in der Differenzenrechnung gegeben wird, eine wesentlich andere Tendenz hat, als die, wovon hier die Rede ist.

Von der Rechnung mit dem Summenzeichen.

A. Von den einfachen Summen.

§. 1.

Die Summe von u_k (einer beliebigen Function der ganzen Zahl k) nach dem Index k zwischen den Grenzen a und b, geschrieben

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \qquad \text{oder} \qquad \sum_{a \lesseqgtr k \lesseqgtr b} u_k$$

bedeutet die Summe aller Werthe, welche u_k annimmt, wenn man für k alle ganzen Zahlen setzt, die der Bedingung $a \lesseqgtr k \lesseqgtr b$ genügen. u_k heisst ihr allgemeines Glied, und die dem niedrigsten und höchsten Werthe von k entsprechenden Werthe von u_k ihr erstes und letztes Glied.

Anmerkung. Wenn keine ganze Zahl die genannte Bedingung erfüllt, so ist die Summe $= 0$ zu setzen.

Ein Factor vor das Summenzeichen geschrieben, bezieht sich ohne Parenthese auf die ganze Summe.

Die folgenden Sätze ergeben sich sogleich aus der Definition.

§. 2.

Für den Index einer Summe kann man, ohne deren Werth zu verändern, die Summe desselben und einer positiven oder negativen ganzen Zahl substituiren. Aus den Grenzgleichungen hat man zugleich die neuen Grenzen zu entwickeln; desgleichen in den folgenden Paragraphen; z. B.

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{k\pm n=a}^{k\pm n=b} u_{k\pm n} = \sum_{k=a\mp n}^{k=b\mp n} u_{k\pm n}$$

§. 3.

Ebenso kann man für den Index einer Summe die Differenz einer ganzen Zahl und des Index substituiren, indem man zu gleicher Zeit die beiden Grenzen mit einander vertauscht; z. B.:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{n-k=b}^{n-k=a} u_{n-k} = \sum_{k=n-b}^{k=n-a} u_{n-k}$$

§. 4.

Wenn u_k für jedes ungerade k verschwindet, so kann man $2k$ für k substituiren; z. B.:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{2k=a}^{2k=b} u_{2k} = \sum_{k=\frac{a}{2}}^{k=\frac{b}{2}} u_{2k}$$

$$\text{wenn } u_{2k+1} = 0$$

Wenn hingegen u_k für jedes gerade k verschwindet, so kann man $2k \pm 1$ für k substituiren; z. B.:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{2k\pm 1=a}^{2k\pm 1=b} u_{2k\pm 1} = \sum_{k=\frac{a\mp 1}{2}}^{k=\frac{b\mp 1}{2}} u_{2k\pm 1}$$

$$\text{wenn } u_{2k} = 0$$

Aus beiden Sätzen zusammen ergiebt sich der folgende ohne jene Beschränkungen:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{k=\frac{a}{2}}^{k=\frac{b}{2}} u_{2k} + \sum_{k=\frac{a-1}{2}}^{k=\frac{b-1}{2}} u_{2k+1}$$

Es ist klar, dass dieser Satz auch hätte allgemeiner ausgesprochen werden können; um der häufigen Anwendung willen ist er jedoch in dieser speciellen Form aufgestellt worden.

§. 5.

Ist n eine ganze, c eine gebrochene Zahl, beide zwischen a und b enthalten, so ist

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{k=a}^{k=n} u_k + \sum_{k=n+1}^{k=b} u_k$$

$$= \sum_{k=a}^{k=c} u_k + \sum_{k=c}^{k=b} u_k.$$

§. 6.

Summen zwischen gleichen Grenzen werden addirt oder subtrahirt, indem man ihre allgemeinen Glieder addirt oder subtrahirt; z. B.:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \pm \sum_{k=a}^{k=b} v_k = \sum_{k=a}^{k=b} (u_k \pm v_k)$$

§. 7.

Gleiche Grössen nach derselben darin enthaltenen allgemeinen Zahl zwischen denselben Grenzen summirt, geben gleiche Summen; z. B. wenn $u_k = v_k$ ist, so ist auch

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{k=a}^{k=b} v_k$$

Um sich von der Richtigkeit dieser Sätze zu überzeugen, brauchte man nur statt der Summen die ganze Reihe ihrer Glieder

zu schreiben; dann würden sämmtliche aufgestellte Gleichungen identisch werden.

§. 8.

Jeder Factor, der vor dem Summenzeichen steht, kann auch hinter dasselbe geschrieben werden; und umgekehrt kann man jeden vom Index unabhängigen Factor des allgemeinen Gliedes auch vor das Summenzeichen rücken; z. B.:

$$A \sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{k=a}^{k=b} A\, u_k$$

Hierin liegt nämlich weiter nichts als die einfache Regel der algebraischen Multiplication.

B. Von den Doppelsummen.

§. 9.

Ist ein Factor des allgemeinen Gliedes einer Summe selbst eine Summe, so heisst jene eine Doppelsumme; und, bezüglich auf einander, die von ihr involvirte die erste, sie selbst die zweite Summe. Die Indices beider Summen müssen nothwendigerweise mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet werden. Die allgemeine Form einer Doppelsumme wird sein

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \sum_{h=c_k}^{h=d_k} {}^{k}v_h \quad \text{oder} \quad \sum u_k \sum {}^{k}v_h$$

$$c_k \gtrless h \gtrless d_k$$
$$a \gtrless k \gtrless b$$

wo die Summe nach dem Index h die erste, die nach dem Index k die zweite ist.

Alle vorhergehenden Sätze von den einfachen Summen lassen sich nun auf jede der beiden Summen einzeln anwenden, aus denen eine Doppelsumme besteht. Daraus lassen sich folgende neue Sätze ableiten.

§. 10.

Sind die Grenzen der ersten Summe unabhängig vom Index der zweiten, so kann man beide Summenzeichen vertauschen, ohne den Werth der Doppelsumme zu verändern; z. B.:

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \sum_{h=c}^{h=d} \overset{k}{v}_h = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} u_k \overset{k}{v}_h$$

Die Grösse u_k muss natürlich hinter dem Summenzeichen stehen bleiben, von dessen Index sie abhängig ist, weil sie sonst keinen Sinn hat.

Beweis. Nach §. 8. ist

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \sum_{h=c}^{h=d} \overset{k}{v}_h = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} u_k \overset{k}{v}_h$$

Bezeichnet man diese Grösse durch S, und wendet §. 1. auf die erste Summe an, so ist, indem c' und d' die kleinste und grösste ganze Zahl zwischen c und d bezeichnen,

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \left(u_k \overset{k}{v}_{c'} + u_k \overset{k}{v}_{c'} + \dots + u_k \overset{k}{v}_{d'} \right)$$

daher nach §. 6.

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} u_k \overset{k}{v}_{c'} + \sum_{k=a}^{k=b} u_k \overset{k}{v}_{c'+1} + \dots + \sum_{k=a}^{k=b} u_k \overset{k}{v}_{d'}$$

was man nach §. 1. auch schreiben kann:

$$S = \sum_{h=c'}^{h=d'} \sum_{k=a}^{k=c} u_k \overset{k}{v}_h$$

oder, weil zwischen c und c', d und d' keine ganzen Zahlen liegen,

$$S = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} u_k \overset{k}{v}_h$$

§. 11.

Es seien ferner die Grenzen der ersten Summe abhängig vom Index der zweiten; es fragt sich, ob die Vertauschung der Summenzeichen auch dann noch statthaben kann?

Es sei

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c_k}^{h=d_k} \overset{k}{v}_h$$

wo der Factor u_k, der zur Allgemeinheit nichts beiträgt, mit $\overset{k}{v}_h$ vereinigt worden ist. Es sei ferner, wenn k alle seine Werthe von a bis b durchläuft, c der kleinste Werth von c_k, und d der grösste von d_k. Setzt man c für c_k, d für d_k, so wird S unverändert bleiben, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass alle hinzugetretenen Glieder $= 0$ sind, d. h. dass v_h für $h < c_k$ und für $h > d_k$ verschwindet; demnach ist

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} \overset{k}{v}_h$$

unter der Bedingung $\overset{k}{u}_h = 0$ für $\begin{cases} h > d_k \\ h < c_k \end{cases}$

Diese Gleichung würde offenbar auch noch gelten, wenn c kleiner als das Minimum von c_k und d grösser als das Maximum von d_k wäre. Da jetzt alle Grenzen unabhängig sind, so darf man nach §. 10. die Summenzeichen vertauschen, und es ist

$$S = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} \overset{k}{v}_h$$

unter der obengenannten Bedingung.

Um diese Bedingung entbehrlich zu machen, muss man diejenigen Glieder wegschaffen, auf die sie sich bezieht. Diess geschieht, indem man die k in solche Grenzen einschliesst, dass h weder $< c_k$ noch $> d_k$ sein kann. Man hat daher zu setzen

$$d_k \geqq h \quad ; \quad c_k \leqq h$$

und die k so zu bestimmen, dass sie sowohl diese Bedingungen, als auch die andern

$$k \geqq a \quad ; \quad k \leqq b$$

erfüllen. Sollten sich diese 4 Bedingungen widersprechen, so könnte diess erstens mit den zwei letzten der Fall sein, aber dann würde sowohl der ursprüngliche als auch der resultirende Ausdruck von $S = 0$ sein. Es bleibt daher nur übrig, dass entweder die erste oder die zweite Bedingung um der übrigen willen nicht erfüllt werden könnte. Dann wäre für irgend ein h, aber für jedes k

$$\text{entweder } d_k < h \quad \text{oder} \quad c_k > h$$

Da nun für ein solches k die Grösse v_h verschwindet, so würde für ein solches h die ganze Summe nach k verschwinden müssen, was mit der resultirenden Form vollkommen übereinstimmt.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich folgende Lösung der zu Anfang des Paragraphs gestellten Frage.

Um die Summenzeichen einer Doppelsumme von der Form S zu vertauschen, nehme man das Minimum von c_k oder eine noch kleinere Grösse, und das Maximum von d_k oder eine noch grössere Grösse zu den Grenzen der h, und bestimme die Grenzen der k so, dass die letztern den 4 Bedingungen genügen

$$d_k \geqq h \;;\; c_k \leqq h \;;\; k \geqq a \;;\; k \leqq b$$

Ist c_k oder d_k unabhängig von k, so vereinfacht sich das Verfahren insofern, als respective die zweite oder erste Bedingung wegfällt, weil sie schon durch die Bestimmung der h erfüllt wird.

§. 12.

Obgleich die Grössen c_k und d_k als ganz beliebige Functionen von k betrachtet worden sind, so ist doch der Fall, wo diese lineär sind, fast der einzige, welcher vorkommt. Es würde nun

zwar leicht sein, aus der allgemeinen Regel die diesem Falle entsprechenden Formeln herzuleiten; indessen würde diess nicht die Mühe lohnen, da man neun Fälle unterscheiden müsste. Wir wollen daher nur einige derselben betrachten, die öfters vorkommen werden; es wird dabei namentlich darauf ankommen, die 4 Bedingungen durch 2 zu ersetzen, so dass die Doppelsumme nach Vertauschung der Summenzeichen ihre Form behält. Es sei also

$$1)\qquad c_k = e \quad ; \quad d_k = dk + f$$

wo $d > 0$, demnach

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=e}^{h=dk+f} v_h^k$$

Das Minimum von c_k ist e selbst, das Maximum von $d_k \leqq db+f$, daher sind die Grenzen der h

$$e \leqq h \leqq db+f$$

Die Bedingungen für die k sind

$$dk+f \geqq h \quad ; \quad k \geqq a \quad ; \quad k \leqq b$$

oder anstatt der ersten

$$k \geqq \frac{h-f}{d}$$

Um diese mit der zweiten vereinigen zu können, muss für jedes h sein

$$\text{entweder} \quad \frac{h-f}{d} \geqq a \quad \text{oder} \quad \frac{h-f}{d} \leqq a$$

Die letztere dieser beiden Bedingungen ist unmöglich zu erfüllen; denn setzte man für h sein Maximum, so müsste auch $b \leqq a$, also $S = 0$ sein. In Betreff der erstern hat man zu setzen

$$\frac{h-f}{d} \geqq \frac{e-f}{d} \geqq a$$

Demnach wird, wenn $e - f \geqq ad$ ist, die Bedingung $k \geqq a$ durch die andere $k \geqq \dfrac{h-f}{d}$ mit erfüllt, und man hat

$$\sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=e}^{h=dk+f} \overset{k}{v}_h = \sum_{h=e}^{h=db+f} \sum_{k=\frac{h-f}{d}}^{k=b} \overset{k}{v}_h$$

unter der Bedingung $e - f \geqq ad$.

2) Es sei $c_k = ck + e \;\; ; \;\; d_k = f$,
wo $c > 0$, und

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=ck+e}^{h=f} \overset{k}{v}_h$$

Die Grenzen der h sind offenbar

$$ca + e \leqq h \leqq f$$

die Bedingungen für die k

$$ck + e \leqq h \;\; ; \;\; k \geqq a \;\; ; \;\; k \leqq b$$

oder statt der ersten

$$k \leqq \frac{h-e}{c}$$

Um die letzte Bedingung durch diese zu ersetzen, muss sein

$$\frac{h-e}{c} \leqq \frac{f-e}{c} \leqq b$$

denn unter der Bedingung, dass $\frac{f-c}{c} \leqq b$ ist, ist auch stets $k \leqq b$, wenn $k \leqq \frac{h-e}{c}$ ist; folglich hat man

$$\sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=ck+e}^{h=f} \overset{k}{v}_h = \sum_{h=ca+e}^{h=f} \sum_{k=a}^{k=\frac{h-e}{c}} \overset{k}{v}_h$$

unter der Bedingung: $f - e \leqq bc$.

C. Von den vielfachen Summen.

§. 13.

Eine $n$fache Summe ist eine Summe, deren allgemeines Glied eine $n-1$fache Summe zum Factor hat. Die allgemeine Form einer vielfachen Summe ist

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k \sum_{h=c}^{h=d} \overset{k}{v_h} \sum_{p=e}^{p=f} \overset{h}{w_p}(k) \ldots \sum_{q=m}^{q=n} z\,(k, h, p, \ldots q)$$

wo c und d von k, e und f von k und h u. s. w., m und n von allen Indicibus ausser q abhängen können.

Unter den in einer vielfachen Summe enthaltenen einzelnen Summen heisst diejenige die erste, deren allgemeines Glied keine Summe enthält, die, deren allgemeines Glied die erste Summe enthält, die zweite u. s. w.

§. 14.

Durch wiederholte Anwendung von §. 8. auf eine vielfache Summe erhält man folgenden Satz:

In einer vielfachen Summe kann man die vor, hinter und zwischen den Summenzeichen stehenden Grössen, so wie auch beliebige Factoren derselben, unter einander beliebig vertauschen und an beliebigen Stellen zwischen die Summenzeichen setzen, wenn nur keine Grösse vor ein Summenzeichen zu stehen kommt, von dessen Index sie abhängig ist.

§. 15.

Durch wiederholte Anwendung von §. 10. auf eine vielfache Summe erhält man folgenden Satz:

In einer vielfachen Summe kann man die Summenzeichen beliebig unter einander vertauschen, wenn man nur die Reihenfolge derjenigen nicht ändert, deren Grenzen und Indices von einander abhängig sind. Indessen können auch diese je zwei vertauscht werden, wenn man nur die Regel von §. 11. beachtet.

D. Von der Anwendung des Summenzeichens auf Summen unendlicher Reihen.

§. 16.

Es ist klar, dass die bisher aufgestellten Sätze mit Ausnahme von §. 10. 11. 12. 15. auch für Summen unendlicher Reihen gelten. Ein Zweifel, ob die Reihen bei den vorgenommenen Veränderungen convergent bleiben, kann nämlich nur da entstehen, wo sich die Reihenfolge der Glieder ändert, und diess ist bei der Vertauschung der Summenzeichen der Fall. Was diese betrifft, so gilt folgender Satz:

In einer Doppelsumme, von deren Grenzen beliebige unendlich sind, kann man die Summenzeichen nach dem in §. 10. 11. beschriebenen Verfahren vertauschen, wenn nur nach der Vertauschung die Glieder der ersten Summe eine convergente oder endliche Reihe bilden. In diesem Falle ist nämlich stets die zweite Summe convergent.

Beweis. Sind für's Erste alle Grenzen unabhängig, so kann man folgende 4 Fälle unterscheiden.

1) Es sei von den 4 Grenzen der Doppelsumme

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} v_h^k$$

allein $d = \infty$, a, b, c hingegen endliche Grössen. Setzt man

$$\sum_{h=c}^{h=\infty} v_h^k = r_n + \sum_{h=c}^{h=n} v_h^k$$

so verschwindet r_n für $n = \infty$, daher ist

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \left(r_n + \sum_{h=c}^{h=n} u_h^k \right)$$

$$= \sum_{k=a}^{k=b} r_n + \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=n} v_h^k$$

$$= \sum_{k=a}^{k=b} r_n + \sum_{h=c}^{h=n} \sum_{k=a}^{k=b} v_h^k$$

und da der erste Theil der rechten Seite für $n = \infty$ verschwindet, so convergirt die zweite Summe, und man hat

$$S = \sum_{h=c}^{h=\infty} \sum_{k=a}^{k=b} v_h^k$$

§ 2) a und b seien endliche Grössen, $c = -\infty$, d nach Gefallen endlich oder unendlich. Setzt man

$$\sum_{h=-\infty}^{h=d} v_h^k = r_n + \sum_{h=-n}^{h=d} v_h^k$$

so verschwindet r_n für $n = \infty$, und es ist

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \left(r_n + \sum_{k=-n}^{h=d} v_h^k \right)$$

$$= \sum_{k=a}^{k=b} r_n + \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=-n}^{h=d} v_h^k$$

und da man die Summen auch vertauschen kann, wenn $d = \infty$ ist, so ist ferner

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} r_n + \sum_{h=-n}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} v_h^k$$

also wie vorher

$$S = \sum_{h=-\infty}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=b} v_h^k$$

3) a sei eine endliche Grösse, $b = \infty$, c und d nach Gefallen endlich oder unendlich. Setzt man

$$S = R_n + \sum_{k=a}^{k=n} \sum_{h=c}^{h=d} v_h^k$$

so verschwindet R_n für $n = \infty$, und man hat dem eben bewiesenen zufolge

$$S = R_n + \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=n} v_h^k$$

Da nach der Annahme die erste Summe convergirt, so hat man, wenn $n = \infty$ wird,

$$S = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=a}^{k=\infty} v_h^k$$

4) Es sei $a = -\infty$, b, c, d nach Gefallen endlich oder unendlich. Setzt man

$$S = R_n + \sum_{k=-n}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} v_h^k$$

wo R_n für $n = \infty$ verschwindet, dann ist nach dem eben bewiesenen

$$S = R_n + \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=-n}^{k=b} v_h^k$$

und, weil nach der Annahme die erste Summe convergirt, so hat man wie vorher

$$S = \sum_{h=c}^{h=d} \sum_{k=-\infty}^{k=b} v_h^k$$

Nun bleibt noch der Fall übrig, wo von den Grenzen der ersten Summe die eine oder die andere vom Index der zweiten abhängig ist. Es sei also

$$S = \sum_{k=c}^{k=b} \sum_{h=c_k}^{h=d_k} v_h^k$$

wo jede der vier Grössen a, b, b_k, d_k endlich oder unendlich sein kann. Es seien ferner a_h, b_h, c, d die Grenzen, welche sich respective für die k und die h aus dem Verfahren von §. 11. ergeben würden; dann erhält man ebenso wie an der angeführten Stelle

$$S = \sum_{k=a}^{k=b} \sum_{h=c}^{h=d} v_h^k$$

mit der Bestimmung, dass $v_h^k = 0$ für $\begin{cases} h > d_k \\ h < c_k \end{cases}$

Da jetzt die Grenzen c, d constant sind, so kann man die Summenzeichen vertauschen, sobald man weiss, dass

$$\sum_{k=a}^{k=b} v_h^k$$

einen endlichen, bestimmten Werth hat; nach der Annahme ist diess der Fall bei der Summe

$$\sum_{k=a_h}^{k=b_h} v_h^k$$

Beide Ausdrücke sind aber identisch, da die Glieder, welche der erstere überschüssig hat, $=0$ gesetzt worden sind. Folglich kann man die Summenzeichen vertauschen, und erhält

$$S=\sum_{h=c}^{h=d}\sum_{k=a}^{k=b}\overset{k}{v}_h$$

mit der obigen Bestimmung; oder

$$S=\sum_{h=c}^{h=d}\sum_{k=a_h}^{k=b_h}\overset{k}{v}_h$$

womit der Satz für alle möglichen Fälle bewiesen ist. So oft man also in Doppelsummen die Summenzeichen vertauscht, und zur ersten Summe die einer unendlichen Reihe erhält, so hat man stets deren Convergenz von Neuem zu prüfen, nie aber die der zweiten Summe.

E. Anwendung des Summenzeichens zur Multiplication der Reihen.

§. 17.

Wenn in einer vielfachen Summe

$$S=\sum_{k=a}^{k=b}u_k\sum_{h=c}^{h=d}v_h\sum_{m=e}^{m=f}w_m\ldots.$$

nicht nur alle Grenzen constant sind, sondern auch die Grössen u_k, v_h, w_m, ... einzig und allein von demjenigen Index abhängen, welcher dem unmittelbar vorstehenden Summenzeichen zugehört: so ist die vielfache Summe gleich dem Producte der einfachen Summen

$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k\,,\quad \sum_{h=c}^{h=d} v_h\,,\quad \sum_{m=e}^{m=f} w_m\,,\quad \text{etc.}$$

Da nämlich (um bei der dreifachen Summe stehen zu bleiben) die ganze erste Summe vom Index der zweiten unabhängig ist, so kann man sie als gemeinschaftlichen Factor aller Glieder der zweiten absondern und mit der ganzen zweiten Summe multipliciren; also

$$\sum_{h=c}^{h=d} v_h \sum_{m=e}^{m=f} w_m = \left(\sum_{h=c}^{h=d} v_h\right)\left(\sum_{m=e}^{m=f} w_m\right)$$

Aus demselben Grunde ist die zweite Summe ein Factor der dritten; folglich

$$S = \left(\sum_{k=a}^{k=b} u_k\right)\left(\sum_{h=c}^{h=d} v_h \sum_{m=e}^{m=f} w_m\right)$$

$$= \left(\sum_{k=a}^{k=b} u_k\right)\left(\sum_{h=c}^{h=d} v_h\right)\left(\sum_{m=e}^{m=f} w_m\right)$$

Bei einer mehrfachen Summe würde man leicht eben so weiter schliessen können.

§. 18.

Aufgabe. Das Product beliebig vieler, nach Potenzen einer Grösse geordneten, einfachen Summen nach Potenzen derselben Grösse zu entwickeln.

Der Einfachheit wegen wollen wir nur ein Product von 3 Factoren nehmen; diese werden, nach Potenzen von x geordnet, folgende Form haben:

$$s = \sum_{k=m}^{k=n} A_k x^k \quad ; \quad s' = \sum_{k=m'}^{k=n'} B_k x^k$$

$$s'' = \sum_{k=m''}^{k=n''} C_k x^k$$

Drückt man die verschiedenen Indices durch verschiedene Buchstaben aus, so hat man nach §. 17.

$$s\,s'\,s'' = \sum_{k=m}^{k=n} A_k x^k \sum_{h=m'}^{h=n'} B_h x^h \sum_{p=m''}^{p=n''} C_p x^p$$

Das ist nach §. 14.

$$s\,s'\,s'' = \sum_{k=m}^{k=n} \sum_{h=m'}^{h=n'} \sum_{p=m''}^{p=n''} A_k B_h C_p x^{k+h+p}$$

Setzt man $p - h - k$ für p, so erhält man nach §. 2.

$$s\,s'\,s'' = \sum_{k=m}^{k=n} \sum_{h=m'}^{h=n'} \sum_{p=m''+k+h}^{p=n''+k+h} A_k B_h C_{p-k-h} x^p$$

Nun vertausche man das erste Summenzeichen mit allen übrigen, so dass es an's linke Ende zu stehen kommt, so erhält man nach einander

$$s\,s'\,s'' = \sum_{k=m}^{k=n} \sum_{p=k+m'+m''}^{p=k+n'+n''} \sum_{h=m'}^{h=n'} A_k B_h C_{p-k-h} x^p$$

$$p - k - n'' \gtreqless h \gtreqless p - k - m''$$

$$s\,s'\,s'' = \sum_{p=m+m'+m''}^{p=n+n'+n''} \sum_{k=m}^{k=n} \sum_{h=m'}^{h=n'} A_k B_h C_{p-k-h} x^p.$$

$$p - k - n'' \gtreqless h \gtreqless p - k - m''$$

$$p - n' - n'' \gtreqless k \gtreqless p - m' - m''.$$

oder

$$s\,s'\,s'' = \sum_{p=m+m'+m''}^{p=n+n'+n''} x^p \sum_{k=m}^{k=n} A^k \sum_{h=m'}^{h=n'} B_h\, C_{p-k-h}$$

$$p-k-n'' \gtrless h \gtrless p-k-m''$$

$$p-n'-n'' \gtrless k \gtrless p-m'-m''$$

Die Summe nach p ist die einer nach Potenzen von x geordneten Reihe, deren von x unabhängige Coefficienten allgemein durch die Doppelsumme nach k ausgedrückt sind. Diese specielle Lösung der Aufgabe wird hinreichen, um nicht nur das Verfahren für jeden andern Fall deutlich zu machen, sondern auch den resultirenden Ausdruck der allgemeinen Lösung im Voraus übersehen zu lassen. Sind $s_1, s_2, s_3, \ldots s_i, \ldots s_r$ Summen, deren Glieder nach Potenzen von x geordnet sind, so wird die allgemeine Form einer solchen sein:

$$s_i = \sum_{k_i=m_i}^{k_i=n_i} \overset{i}{A}_{k_i}\, x^{k_i}$$

und man wird erhalten

$$s_1\, s_2\, s_3 \ldots s_r =$$

$$\sum_{k_r=m_1+m_2+\ldots m_r}^{k_r=n_1+n_2+\ldots n_r} x^{k_r} \sum_{k_1=m_1}^{k_1=n_1} \overset{1}{A}_{k_1} \sum_{k_2=m_2}^{k_2=n_2} \overset{2}{A}_{k_2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \sum_{k_{r-1}=m_{r-1}}^{k_{r-1}=n_{r-1}} \overset{r-1}{A}_{k_{r-1}}\, \overset{r}{A}_{k_r-k_1-k_2-\ldots k_{r-1}}$$

$$k_r-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}-n_{i+1}-n_{i+2}-\ldots-n_r \gtrless k_i$$

$$\gtrless k_r-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}-m_{i+1}-m_{i+2}-\ldots-m_r$$

für $i=r-1, r-2, \ldots. 3, 2, 1$

§. 19.

Sind mehrfache Summen zu multipliciren, so ändert sich das Verfahren nicht. Die vielfache Summe, welche man erhält, wenn man alle Factoren neben einander schreibt, drückt jedesmal das Product derselben aus.

Um sich davon zu überzeugen, muss man sich vergegenwärtigen, dass eine vielfache Summe keinen zweideutigen oder verschiedenen Sinn annimmt, wenn man einen zwischen zwei Summenzeichen stehenden Factor in eine Reihe entwickelt, und deren Summe an seine Stelle schreibt; dass z. B.

$$\text{wenn} \quad s = \sum_{k=a}^{k=b} u_k \sum_{h=c}^{h=d} {}^k v_h$$

$$\text{und} \quad u_k = t_k \sum_{m=e}^{m=f} {}^k w_m \quad \text{ist,}$$

$$\text{auch} \quad s = \sum_{k=a}^{k=b} t_k \sum_{m=e}^{m=f} {}^k w_m \sum_{h=c}^{h=d} {}^k v_h$$

ist. Nämlich das allgemeine Glied der Summe nach k, welches ein Product der Factoren

$$u_k \quad \text{und} \quad \sum_{h=c}^{h=d} {}^k v_h$$

ist, kann nach §. 17. durch die Doppelsumme ausgedrückt werden, welche das allgemeine Glied des zweiten Ausdrucks von s darstellt. Da also die allgemeinen Glieder beider Ausdrücke von s gleich sind, so sind es nach §. 7. auch die Summen selbst.

Wären nun z. B. die beiden Doppelsummen

$$s = \sum_{k=a}^{k=a'} t_k \sum_{h=b}^{h=b'} {}^k u_h$$

$$s' = \sum_{m=c}^{m=c'} v_m \sum_{n=d}^{n=d'} \overset{m}{w}_n$$

zu multipliciren, so setze man die allgemeinen Glieder $= U_k$, V_m, so ist nach §. 17.

$$ss' = \sum_{k=a}^{k=a'} U_k \sum_{m=c}^{m=c'} V_m$$

Jetzt kann man nach dem eben bewiesenen U_k durch seinen Werth ausdrücken, was in Bezug auf V_m keinem Zweifel unterworfen ist; daher hat man

$$ss' = \sum_{k=a}^{k=a'} t_k \sum_{h=b}^{h=b'} \overset{k}{u}_h \sum_{m=c}^{m=c'} v_m \sum_{n=d}^{n=d'} \overset{m}{w}_n$$

Ebenso würde sich das Gesagte für mehr als 2 Factoren und für mehrfache Summen bestätigen.

Nach Aufstellung dieser Sätze und Erläuterung der dahin gehörigen Begriffe und Bezeichnungen wird es leichter sein, etwas Bestimmtes über die vorher besprochenen Gegenstände zu sagen. Was zunächst den Gebrauch des Summenzeichens betrifft, so empfiehlt er sich durch folgende Punkte. Das Summenzeichen ist eine Abkürzung, die man in Gedanken leicht in die vollständig ausgeschriebene Form umsetzen kann, so dass durch sie die deutliche Vorstellung von der Bedeutung der bezeichneten Grösse nicht verloren geht; ja sie hat sogar in dieser Hinsicht bei einiger Uebung vor jener den Vorzug, besonders wenn man es mit complicirten Ausdrücken zu thun hat. Ferner wird man durch diese Abkürzung in den Stand gesetzt, vielfache Summen, die sich nicht ausschreiben lassen, nicht nur auszudrücken, sondern auch in der Rechnung zu behandeln; man ist daher nicht genöthigt, diese

complicirten Formen zu vermeiden, und die Auflösung von Problemen, welche dieselben erfordern, aus diesem Grunde aufzugeben. Ueberhaupt wird durch diese Abkürzung ein strictes und regelrechtes Verfahren, im Gegensatz zum inductiven, begünstigt. Davon haben wir ein Beispiel in §. 18., andere werden späterhin vorkommen; es würden deren aber noch weit mehr sein, wenn wir öfter recurrirende Gleichungen zu behandeln hätten. Aus diesen und andern Gründen zeigt sich die genannte Bezeichnung geeignet, in allen Fällen, wo Reihen mit veränderlicher oder allgemein auszudrückender Gliederzahl vorkommen, mit Nutzen angewandt zu werden, ausgenommen etwa, wo nur die ersten Glieder einer Reihe in Betracht kommen. Insbesondere aber entspricht sie unserem Zwecke sehr, indem sie die Bildungsgesetze, so viel deren in einem Ausdrucke unabhängig neben einander bestehen, gesondert darstellt. Denn da das Fortschreiten der in einer vielfachen Summe enthaltenen Reihen allein in dem Wachsen der darin vorkommenden veränderlichen Zahlen oder Indices besteht, so sind in einer solchen ebenso viel unabhängige Fortschreitungsgesetze, als Indices oder Summenzeichen. Demnach wird das Bildungsgesetz eines Ausdrucks in dieser Form ein abgeschlossenes sein, wenn die Anzahl der Summenzeichen constant ist, oder, um das Kriterium sogleich auf Ausdrücke der höhern Differentialquotienten anzuwenden, wenn jene vom Ordnungsexponenten unabhängig ist.

Jetzt bleibt uns nur noch übrig, einige Bezeichnungen festzustellen, die wir von jetzt an unverändert beibehalten wollen, und an einige bekannte Sätze zu erinnern, die in der Folge häufig in Anwendung kommen werden.

Der $n$te Differentialquotient von y nach x wird bezeichnet durch

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

und seine Bedeutung auf die der successiven Differenziation, die wir stets als bekannt voraussetzen, durch folgende Gleichungen zurückgeführt:

$$\frac{d^1 y}{dx^1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}$$

etc. ...

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{dx}$$

Ausser dieser Bezeichnung werden wir uns jedoch auch einer andern bedienen, nämlich

$$f^n(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

indessen kann dieselbe nur da gelten, wo die unabhängige Veränderliche allein unter dem Functionszeichen steht.

Man kann die höhern Differentialquotienten auch allgemeiner auf die niedern zurückführen, nämlich durch die Gleichung

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^k\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}}{dx^k}$$

Diese Gleichung kennen wir schon für $k = 1$, da ist

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{dx}$$

Nimmt man an, dass sie für den nächst niedern Werth von k richtig sei, so ist, wenn man zugleich $n-1$ für n setzt,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^{k-1}\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}}{dx^{k-1}}$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so erhält man, der Definition gemäss, die zu beweisende Formel.

Ferner ist bekannt, dass wenn für jeden Werth von x zwischen beliebigen Grenzen $y = z$, auch für jeden Werth von x zwischen denselben Grenzen $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ ist; kurz, dass man jede für eine darin enthaltene Grösse allgemein gültige Gleichung differenziiren kann. Thut man dies mehrmals, so ergiebt sich, dass unter der genannten Voraussetzung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n z}{dx^n}$$

Ueber den Gebrauch der Buchstaben wollen wir folgende Bestimmungen treffen. $g, h, k, m, n, p, q, r, \mu, \nu$ sind stets ganze Zahlen, x ist im Allgemeinen die unabhängige Veränderliche der Differenziation; wo eine zweite vorkommt, wird sie durch ξ bezeichnet; u, y, z sind Functionen von x; $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, A, B, D$ Constante zu x und ξ; f, φ sind Functionszeichen; l bezeichnet den natürlichen Logarithmus, dessen Grundzahl e ist; π ist die halbe Kreisperipherie für den Radius $= 1$; i steht für $\sqrt{-1}$. Binomialcoefficienten werden geschrieben n_m oder $(a)_m$, wo die Klammern im Fall einer möglichen Verwechselung dazu dienen, die specielle Bedeutung des Index m von der allgemeinen zu unterscheiden. Definirt ist $(a)_m$ durch folgende 3 Gleichungen

$$(a)_m = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}$$

$$(a)_0 = 1$$

$$(a)_{-m} = 0 \quad \text{für} \quad m > 0$$

Von Eigenschaften dieser Grössen sind folgende zu nennen:

1) Für beliebige Exponenten a

$$(a)_m = (-1)^m (m-1-a)_m$$

$$(a)_m + (a)_{m-1} = (a+1)_m$$

2) Für ganze positive Exponenten n

$$n_m = n_{n-m}$$

$$(a)_n n_m = (a)_m (a-m)_{n-m}$$

$$n_{n+m} = 0 \quad \text{für} \quad m > 0$$

3) Für einige specielle Werthe des Exponenten

$$(-1)_m = (-1)^m$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_m = (-1)^m (2m)_m \, 2^{-2m}$$

Diese Formeln ergeben sich sehr leicht, wenn man für die Binomialcoefficienten ihre Werthe setzt. Wir werden sie in der Folge als bekannt voraussetzen, ohne darauf zurück zu verweisen.

Erstes Capitel.

Von der Zerlegung der Functionen.

Die Auffindung der independenten Ausdrücke für höhere Differentialquotienten kann nach den in der Einleitung getroffenen Bestimmungen als eine dem einfachen Differenziiren zur Seite stehende Operation angesehen werden. Hier wie dort handelt es sich darum, jede mögliche Form von Functionen in der Aufstellung der Regeln zu berücksichtigen. Ob sich nun gleich diese Formen nicht erschöpfen lassen, so löst doch die Differenzialrechnung ihre Aufgabe mittelst weniger Formeln, auf einem Wege, den wir, um auf demselben auch zu unserem Ziele zu gelangen, näher betrachten wollen. Man kann jede explicite Function als aus gewissen einfachen Functionen zusammengesetzt betrachten, deren überhaupt nur eine begrenzte Anzahl existiren können, insofern die Möglichkeit, eine Function explicite auszudrücken, auf ihrer Zurückführung auf bekannte Functionen beruht. Es kommt daher nur darauf an, die Differentialquotienten der zusammengesetzten Functionen auf die der einfachen zurückzuführen, aus denen sie bestehen. Hier wollen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die unabhängige Veränderliche in einer Function ein oder mehrmal vorkommt. Im erstern kann die Reduction jederzeit mittelst der Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \, \frac{dz}{dx}$$

geschehen. Wenn z. B. die Function

$$y = (a + l \sin ax)^{\beta}$$

gegeben ist, so kann man, um sie in einfache Functionen zu zerlegen, setzen

$$y = x_1^{\beta} \; ; \; x_1 = a + x_2 \; ; \; x_2 = l x_3 \; ; \; x_3 = \sin x_4 \; ; \; x_4 = ax$$

und erhält nach der genannten Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dx}\;;\quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{dx_1}{dx_2}\,\frac{dx_2}{dx}\;;\;\ldots\;\text{etc.}$$

$$\ldots\;\frac{dx_4}{dx} = \frac{dx_4}{dx}$$

und nach gehöriger Substitution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,.\,x_1^{\beta}}{dx_1}\,\frac{d(a+x_2)}{dx_2}\,.\,\frac{dlx_3}{dx_3}\,\frac{d\sin x_4}{dx_4}\,\frac{d\,.\,\alpha x}{dx}$$

Die Factoren dieses Ausdrucks sind für jeden Fall durch folgende Formeln gegeben:

$$\frac{d(a+x)}{dx} = 1$$

$$\frac{d\,.\,ax}{dx} = a$$

$$\frac{d\,.\,x^a}{dx} = a\,x^{a-1}$$

$$\frac{d\,.\,e^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\,\text{arc tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Den zweiten Fall, wo die Veränderliche mehrmals in einer Function vorkommt, wie z. B. in

$$y = \left(e^x + \frac{lx}{x}\right)^a$$

kann man zwar durch partielle Differenziation auf den ersten zurückführen; denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(e^{x_1} + \frac{lx_2}{x_3}\right)^a}{dx_1} + \frac{d\left(e^{x_1} + \frac{lx_2}{x_3}\right)^a}{dx_2} + \frac{d\left(e^{x_1} + \frac{lx_2}{x_3}\right)^a}{dx_3}$$

wo nach der Differenziation $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ zu setzen ist. Allein bei den höhern Differentialquotienten, wo wir uns auf Functionen mit einer Veränderlichen beschränken müssen, würde sich kein entsprechendes Verfahren anwenden lassen. Man kann indessen das Verhältniss beider Fälle auch anders auffassen. Im ersten entstand die Function dadurch, dass eine Constante nach der andern zu einer Veränderlichen hinzutrat; im zweiten hingegen verbinden sich ausserdem bisweilen zwei Functionen mit einander. Die verschiedenen Arten, wie diess geschehen kann, lassen sich nun auf zwei zurückführen, nämlich durch Addition und durch Multiplication. Eine Differenz zweier Functionen kann man ausdrücken $y - z = y + (-1) . z$, einen Quotienten $\frac{z}{y} = y^{-1} z$, eine Potenz $z^y = e^{ylz}$, eine Wurzel $\sqrt[y]{z} = e^{y^{-1} lz}$, den Logarithmus von z nach der Grundzahl $y = (ly)^{-1} lz$. Demzufolge sind noch zwei Formeln nöthig, zur Reduction der Differentialquotienten einer Summe und eines Products zweier Functionen: Diese sind

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d.yz}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}$$

Jetzt wird man die obengenannte Function auf folgende Art zerlegen:

$$y = x_1{}^a;\ x_1 = x_2 + x_3;\ x_2 = e^x;\ x_3 = x_4 x_5;\ x_4 = x^{-1};\ x_5 = lx$$

so dass ausser einfachen Functionen einer Veränderlichen nur eine Summe und ein Product zweier Functionen vorkommen.

Hieraus sieht man, dass die Aufgabe, eine explicite Function zu differenziiren, folgende vier besondere in sich schliesst:

1) Wenn $f(x) = f_1(z)$; $z = f_2(x)$

2) Wenn $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

3) Wenn $f(x) = f_1(x) f_2(x)$

ist, den Differenzialquotienten von $f(x)$ durch die von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auszudrücken, und

4) die der einfachen Functionen (wozu wir immer nur die 7 obengenannten rechnen werden), entwickelt darzustellen. Die erste findet ihre Lösung in der ersten Reductionsformel, die beiden folgenden in den zwei zuletzt genannten, die vierte in den 7 vorhergehenden Formeln.

Dasselbe Verfahren lässt sich nun offenbar auf unsere Aufgabe anwenden: auch sie wird in vier Theile zerfallen, die sich von den eben genannten nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle des ersten Differentialquotienten die höhern treten. Wären die vier Aufgaben in dieser Gestalt gelöst, so wäre die Theorie fertig; denn der Gang der Reduction wäre kein anderer, als der eben beschriebene. Indessen werden wir, wiewohl ohne Hinderniss für den letztern, um die erste Aufgabe lösen zu können, deren Prämissen und Forderung zugleich verallgemeinern müssen. Die zweite und dritte Aufgabe werden den Gegenstand des folgenden Capitels ausmachen.

Zweites Capitel.

Formeln für Summen und Producte von Functionen.

Um eine Summe zu differenziiren, hat man bekanntlich nur die einzelnen Glieder zu differenziiren. Wiederholt man die Operation $n$mal, so erhält man sogleich

$$\frac{d^n(y+z)}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^n z}{dx^n}$$

oder allgemeiner

$$\frac{d^n}{dx^n} \cdot \sum_{k=a}^{k=b} z_k = \sum_{k=a}^{k=b} \frac{d^n z_k}{dx^n}.$$

Ist ein Product zweier Functionen y, z gegeben, so erhält man durch successive Differenziation:

$$\frac{d.yz}{dx} = y\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}z$$

$$\frac{d^2.yz}{dx^2} = y\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}z$$

$$\frac{d^3.yz}{dx^3} = y\frac{d^3z}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}z$$

Hier ist nicht nur das Gesetz der veränderlichen Elemente, sondern auch das der numerischen Coefficienten, die sich als Binomialcoefficienten kund geben, leicht zu erkennen; und wenn man der gleichen Form wegen y und z durch $\frac{d^0y}{dx^0}$ und $\frac{d^0z}{dx^0}$ bezeichnet, so kann man die erhaltenen Ausdrücke unter der folgenden allgemeinen zusammenfassen:

$$\frac{d^n.yz}{dx^n} = \sum_{k=0}^{k=n} n_k \frac{d^ky}{dx^k}\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}} \tag{1}$$

Um zu beweisen, dass diese Gleichung auch fernerhin richtig bleibt, differenziiren wir sie noch einmal, so kommt:

$$\frac{d^{n+1}.yz}{dx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n} n_k \frac{d^ky}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}z}{dx^{n-k+1}}$$

$$+\sum_{k=0}^{k=n} n_k \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}$$

und wenn man im zweiten Theile $k-1$ für k setzt:

$$\frac{d^{n+1}.yz}{dx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n} n_k \frac{d^ky}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}z}{dx^{n-k+1}}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=n+1} n_{k-1} \frac{d^ky}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}z}{dx^{n-k+1}}$$

Beide Summen ändern ihre Werthe nicht, wenn man sie zwischen den Grenzen 0 und $n+1$ nimmt, weil sowohl n_{k-1} für $k=0$, als auch n_k für $k=n+1$ verschwindet. Daher lassen sie sich nach §. 8. der Einleitung in eine vereinigen, nämlich:

$$\frac{d^{n+1}.yz}{dx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n+1} (n_k + n_{k-1}) \frac{d^k y}{dx^k} \frac{d^{n-k+1} z}{dx^{n-k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n+1} (n+1)_k \frac{d^k y}{dx^k} \frac{d^{n+1-k} z}{dx^{n+1-k}}$$

Diese Gleichung stimmt vollkommen mit Gleichung (1) überein, und zeigt daher, dass diese richtig bleibt, wenn n wächst, was zu beweisen war.

Die Gleichung (1) ist die bekannte, gewöhnlich nach Leibnitz benannte Formel, die wir jedoch hier als unentbehrliches Glied in die Reihe der Grundformeln aufnehmen müssen. Sind y und z, oder eins von beiden, selbst Producte von Functionen, so kann man die zwei letzten Factoren des allgemeinen Gliedes nach derselben Formel entwickeln, und somit dieselbe auf Producte von mehr als 2 Factoren anwenden. Indessen werden solche Ausdrücke sehr complicirt, indem ein Product von m Factoren eine $(m-1)$ fache Summe giebt.

Drittes Capitel.

Entwickelung der höhern Differentialquotienten einer Function von z nach denen der Potenzen von z.

Differenziirt man $f(z)$ mehrmals nach x, so erhält man nach einander:

$$\frac{df(z)}{dx} = f^1(z)\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2f(z)}{dx^2} = f^1(z)\,\frac{d^2z}{dx^2} + f^2(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^3f(z)}{dx^3} = f^1(z)\,\frac{d^3z}{dx^3} + 3f^2(z)\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2} + f^3(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^3$$

Diese Entwickelung, die wir übrigens nicht weiter fortsetzen wollen, ist nur um zweier Bemerkungen willen ausgeführt worden. Man sieht nämlich leicht,

1) dass die erhaltenen Reihen nach den successiven Differenzialquotienten der Function f fortschreiten; der niedrigste ist der erste, und der höchste hat mit der linken Seite gleichen Ordnungsexponenten;

2) dass die Coefficienten dieser Grössen von der Function f unabhängig sind.

Man kann daher setzen

$$\frac{d^nf(z)}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z)\,\overset{n}{u}_k \tag{2}$$

wo $\overset{n}{u}_k$ eine bestimmte Function von z, n, k ist, die dieselbe bleibt, wenn die Bedeutung von f wechselt. Ist also $\varphi_h(z)$ eine Function von z und h, so hat man

$$\frac{d^n\varphi_h(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{\varphi}_h(z)\,\overset{n}{u}_k \tag{3}$$

Setzt man hier für h nach einander $1, 2, 3, \ldots n$, so erhält man n im Allgemeinen von einander unabhängige Gleichungen, lineär in Bezug auf $\overset{n}{u}_k$, aus denen man jederzeit die n unbekannten Grössen $\overset{n}{u}$, $\overset{n}{u}_2$, … $\overset{n}{u}_n$ bestimmen kann.

Zur Ausführung der Elimination bedarf es der Annahme specieller Eigenschaften der Function $\varphi_h(z)$. Dass sie unter Beschränkungen dieser Art allgemein möglich ist, werden wir später

hin zeigen. Für jetzt genügt es, die willkührliche Function durch einen bestimmten Werth zu ersetzen. Es sei also

$$\varphi_h(x) = x^h$$

Differenziirt man mehrmals nach x, so kommt:

$$\varphi_h^1(x) = h x^{h-1}$$
$$\varphi_h^2(x) = h(h-1) x^{h-2}$$
$$\varphi_h^3(x) = h(h-1)(h-2) x^{h-3}$$
$$\text{etc.} \quad \ldots \quad \text{etc.}$$

allgemein

$$\varphi_h^k(x) = h(h-1)\ldots(h-k+1) x^{h-k}$$

was man auch schreiben kann:

$$\varphi_h^k(x) = 1.2\ldots k.h_k x^{h-k}$$

Nach Einführung dieser Werthe wird Gleichung (3)

$$\frac{d^n . x^h}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} 1.2\ldots k.h_k x^{h-k} \overset{n}{u}_k$$

oder, wenn man mit x^h dividirt und berücksichtigt, dass h_k für $k > h$ verschwindet,

$$x^{-h} \frac{d^n . x^h}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=h} 1.2\ldots k.h_k x^{-k} u_k^n$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$w_h = x^{-h} \frac{d^n . x^h}{dx^n}$$
$$v_k = 1.2\ldots k x^{-k} u_k^n$$

so wird die Gleichung

$$(4) \qquad w_h = \sum_{k=1}^{k=h} h_k v_k$$

d. i. für $h = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= 2v_1 + v_2 \\ w_3 &= 3v_1 + 3v_2 + v_3 \\ w_1 &= 4v_1 + 6v_2 + 4v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Das Resultat der Elimination zwischen diesen Gleichungen wird sein:

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 \\ v_2 &= -2w_1 + w_2 \\ v_3 &= 3w_1 - 3w_2 + w_3 \\ v_4 &= -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Coefficienten der neuen Entwickelung dieselben sind wie die der alten, und dass man allgemein erhalten wird:

$$v_k = \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h w_h$$

Um diess zu beweisen, substituire man diesen Werth in Gleichung (4), wo wir zum Unterschiede r für h setzen wollen, so kommt:

$$w_r = \sum_{k=1}^{k=r} r_k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h w_h$$

und wenn man nach §. 12. der Einleitung die Summenzeichen vertauscht:

$$w_r = \sum_{h=1}^{h=r} w_h \sum_{k=h}^{k=r} (-1)^{k+h} r_k k_h$$

oder, weil $r_k k_h = r_h (r-h)_{k-h}$ ist,

$$w_r = \sum_{h=1}^{h=r} w_h r_h \sum_{k=h}^{k=r} (-1)^{k+h} (r-h)_{k-h}$$

Setzt man $k+h$ für k, so wird die erste Summe

$$\sum_{k=0}^{k=r-h} (-1)^k (r-h)_k = \begin{cases} 1 & \text{für } h = r \\ (1-1)^{r-h} = 0 & \text{für } h < r \end{cases}$$

folglich verschwinden alle Glieder der zweiten Summe bis auf das letzte für den Index $h = r$, d. h. es bleibt nur übrig

$$w_r = w_r$$

Da nun der Werth von v_k der Gleichung (4) genügt, durch welche er offenbar völlig bestimmt ist, so folgt daraus seine Richtigkeit. Demnach hat man:

$$\overset{n}{u}_k = \frac{x^k}{1.2\ldots k} v_k$$

$$= \frac{x^k}{1.2\ldots k} \sum_{k=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h x^{-h} \frac{d^n . x^h}{dx^n}$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (2) einführt:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{1.2\ldots k} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h x^{-h} \frac{d^n . x^h}{dx^n} \quad (5)$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch einfacher schreiben. Es ist nämlich:

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)^k = (-1)^k \left(1 - \frac{x}{y}\right)^k$$

$$= (-1)^k \sum_{h=o}^{h=k} (-1)^h k_h y^{-h} x^h$$

Differenziirt man n mal nach x, so kommt, da das erste Glied der Summe verschwindet,

$$\frac{d^n . \left(\frac{x}{y} - 1\right)^k}{dx^n} = (-1)^k \sum_{k=1}^{h=k} (-1)^h k_h y^{-h} \frac{d^n . x^h}{dx^n}$$

und wenn man nach der Differenziation $\gamma = x$ setzt,

$$\frac{d^n \cdot \left(\frac{x}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n} (\gamma = x) = (-1)^k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h x^{-h} \frac{d^n \cdot x^h}{dx^n}$$

mithin gleich der ersten Summe des Ausdrucks (5); und wenn man den gefundenen Werth daselbst einführt, so kommt:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{1 \cdot 2 \ldots k} f^k(x) \frac{d^n \cdot \left(\frac{x}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n} (\gamma = x) \quad (6)$$

Diese neue Form der Gleichung (5) ist der ersten bisweilen in der Anwendung vorzuziehen.

Viertes Capitel.

Auf die vorstehende Entwickelung gegründete Reductionsmethode. — Independente Formeln für die einfachen Functionen.

Es ist im ersten Capitel gezeigt worden, wie man jede Function in einfache zerlegen kann. Es kommt jetzt darauf an, ein Verfahren zu finden, wie man mittelst der eben hergeleiteten Gleichung (5) in der independenten Bestimmung der höhern Differentialquotienten von den einfachen Functionen zu den zusammengesetzten ununterbrochen aufsteigen kann. Es sei also $f(x)$ eine Function, in der x nur einmal vorkommt, die sich daher in ununterbrochener Folge in die einfachen Functionen f_1, f_2, f_3, f_4 zerlegen lässt, indem man setzt:

$$f(x) = f_1(x_1) \quad ; \quad x_1 = f_2(x_2)$$
$$x_2 = f_3(x_3) \quad ; \quad x_3 = f_4(x)$$

Da nun die Gleichung (5) die höhern Differentialquotienten von z^h als bekannt voraussetzt, so muss man, um durch das Resultat der ersten Anwendung die vollständigen Prämissen für die nächstfolgenden zu erhalten, sogleich den $n$ten Differentialquotienten einer beliebigen Potenz der zusammengesetzten Function zur gesuchten Grösse machen. Wir setzen daher in der genannten Gleichung $[\varphi(z)]^m$ für $f(z)$; dann lautet sie:

$$\frac{d^n.[\varphi(z)]^m}{dx^n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{z^k}{1.2\ldots k}\frac{d^k.[\varphi(z)]^m}{dz^k}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h z^{-h}\frac{d^n.z^h}{dx^n}$$

Setzt man jetzt:

$$z=x_3=f_4(x)$$
$$\varphi(z)=f_3(x_3)$$

so findet man die höhern Diffq. von x_1^m. Setzt man dann:

$$z=x_2=f_3(x_3)$$
$$\varphi(z)=f_2(x_2)$$

so erhält man die von x_1^m. So kann man fortfahren, und am Schlusse setzen:

$$z=x_1=f_2(x_2)$$
$$\varphi(z)=f_1(x_1)=f(x)$$
$$m=1$$

dann findet man den gesuchten Ausdruck selbst. Hierbei werden allein die allgemeinen Ausdrücke der Grössen

$$\frac{d^n.[f_1(x_1)]^m}{dx_1^n},\quad\frac{d^n.x_1^m}{dx_2^n},\quad\frac{d^n.x_2^m}{dx_3^n},\quad\frac{d^n.x_3^m}{dx^n}$$

oder, was dasselbe ist, die der Grössen

$$\frac{d^n.[f_r(x)]^m}{dx^n}\quad\text{für}\quad r=1,2,3,4$$

als bekannt vorausgesetzt. Da aber die 4 Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ einfache sind, so folgt, dass die Lösung unserer Aufgabe in Betreff solcher Functionen, die die Veränderliche nur einmal enthalten, als beendigt betrachtet werden kann, wenn man die höhern Diffq. jeder ganzen positiven Potenz jeder einfachen

Function allgemein und independent bestimmt hat, wozu wir jetzt übergehen. Von den sieben einfachen Functionen, wie wir sie aufgestellt haben, lassen sich die drei ersten ohne Nachtheil unter eine gemeinschaftliche Form bringen, so dass wir nur folgende fünf behalten:

$$(a+bx)^\alpha \quad , \quad e^x \quad , \quad \cos x \quad , \quad lx, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

Differenziirt man die $m$ten Potenzen dieser Functionen mehrmals, so lassen sich bei den beiden ersten die allgemeinen Ausdrücke leicht erkennen; man findet nämlich:

$$\frac{d.(a+bx)^{m\alpha}}{dx} = m\alpha b\,(a+bx)^{m\alpha-1}$$

$$\frac{d^2.(a+bx)^{m\alpha}}{dx^2} = m\alpha\,(m\alpha-1)\,b^2\,(a+bx)^{m\alpha-2}$$

$$\frac{d^3.(a+bx)^{m\alpha}}{dx^3} = m\alpha\,(m\alpha-1)\,(m\alpha-2)\,b^3\,(a+bx)^{m\alpha-3}$$

etc. etc.

allgemein:

$$\frac{d^n.(a+bx)^{m\alpha}}{dx^n} = m\alpha\,(m\alpha-1)\ldots(m\alpha-n+1)\,b^n\,(a+bx)^{m\alpha-n}$$

was man auch kürzer schreiben kann:

$$\frac{d^n.(a+bx)^{m\alpha}}{dx^n} = 1\,.\,2\ldots n\,(m\alpha)_n\,b^n\,(a+bx)^{m\alpha-n} \tag{7}$$

Desgleichen:

$$\frac{d\,.\,e^{mx}}{dx} = m e^{mx}$$

$$\frac{d^2\,.\,e^{mx}}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$$\frac{d^3\,.\,e^{mx}}{dx^3} = m^3 e^{mx}$$

etc. etc.

allgemein:

$$\frac{d^n\,.\,e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx} \tag{8}$$

Was aber die dritte Function betrifft, so würde eine successive Differenziation noch zu keinem allgemeinen Ausdrucke führen. Am

einfachsten erhält man einen solchen, indem man die Potenz des Cosinus nach den Cosinus der Vielfachen des Bogens entwickelt. Man hat bekanntlich:

$$cos^m\, x = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{k=m} m_k\, cos\,(2k - m)\, x$$

daher:

$$\frac{d^n\, cos^m\, x}{dx^n} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{k=m} m_k \frac{d^n\, cos\,(2k - m)\, x}{dx^n}$$

Jetzt bleibt noch eine Function von der Form $cos\, b\, x$ zu differenziiren; thut man diess, so erhält man:

$$\frac{d\, cos\, b\, x}{dx} = -b\, sin\, b\, x$$

$$= b\, cos\left(b\, x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2\, cos\, b\, x}{dx^2} = b^2\, cos\left(b\, x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3\, cos\, b\, x}{dx^3} = b^3\, cos\left(b\, x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

etc. etc.

allgemein:

$$\frac{d^n\, cos\, b\, x}{dx^n} = b^n\, cos\left(b\, x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

und wenn $b = 2k - m$,

$$\frac{d^n\, cos\,(2k - m)\, x}{dx^n} = (2k - m)^n\, cos\left[(2k - m)\, x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Führt man diesen Werth ein, so kommt:

$$\frac{d^n\, cos^m\, x}{dx^n} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{k=m} m_k\, (2k - m)^n\, cos\left[(2k - m)\, x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Die beiden letzten Functionen, nämlich die Potenzen der Logarithmen und Kreisbogen, müssen wir einstweilen übergehen, weil es nur mit Hülfe späterer Sätze möglich ist, die Coefficienten der Entwickelung ihrer höhern Diffq. independent zu bestimmen. Wir werden daher die Gleichungen (5) (6) nie auf Functionen von Logarithmen oder Bogen anwenden, sondern um dieser Ausnahme willen eine neue Formel entwickeln.

Da indessen die genannten Gleichungen auch angewandt werden können, wenn man, wenigstens von der Function $f(x)$, nur die höhern Differentialquotienten ihrer ersten Potenz kennt, so wird es auch von Nutzen sein, diese für alle einfachen Functionen herzuleiten; und zwar haben wir hier nicht nöthig, die Logarithmen und Bogen auszuschliessen. Die ersten beiden Formeln erhält man aus den schon entwickelten, wenn man $m = 1$ setzt; es ist:

$$(9) \qquad \frac{d^n.(a+bx)^\alpha}{dx^n} = 1.2\ldots n\,(\alpha)_n\, b^n\,(a+bx)^{\alpha-n}$$

$$\frac{d^n.e^x}{dx^n} = e^x$$

die dritte, indem man $b = 1$ setzt; nämlich:

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

die vierte kann man auf die erste zurückführen, denn es ist:

$$\frac{dlx}{dx} = x^{-1}$$

daher:

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = \frac{d^{n-1}.x^{-1}}{dx^{n-1}}$$

Setzt man in der ersten Formel $a=0$, $b=1$, $\alpha=-1$ und $n-1$ für n, so erhält man den Werth der letzten Grösse, nämlich es ist:

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = (-1)^{n+1}\,1.2\ldots(n-1)\,x^{-n}$$

Die fünfte Formel erhält man am einfachsten durch folgendes Verfahren. Es sei $y = arc\,tg\,x$, folglich:

$$x = tg\, y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{cos^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = cos^2 y$$

Differenziirt man immer nach x, so erhält man nach einander:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2 cos\, y\, sin\, y \frac{dy}{dx}$$

$$= -sin\, 2y\, cos^2 y$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -(2 cos\, 2y\, cos^2 y - 2 sin\, 2y\, sin\, y\, cos\, y \frac{dy}{dx}$$

$$= -2\,(cos\, 2y\, cos\, y - sin\, 2y\, sin\, y)\, cos^3 y$$

$$= -2\, cos\, 3y\, cos^3 y$$

Um das Fortschreitungsgesetz leichter zu übersehen, kann man diese Ausdrücke auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = cos\, y\, sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\,.\, cos^2 y\, sin\, 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 1\,.\,2 cos^3 y\, sin\, 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

und man wird leicht erkennen, dass allgemein sein wird:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1\,.\,2 \ldots (n-1)\, cos^n y\, sin\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (10)$$

Um diese Gleichung zu beweisen, differenziire man sie noch einmal, so kommt:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = 1\,.\,2 \ldots n \left[cos^n y\, cos\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left. - cos^{n-1} y\, sin\, y\, sin\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{dy}{dx}$$

$$= 1\,.\,2 \ldots n\, cos^{n+1} y \left[cos\, y\, cos\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left. - sin\, y\, sin\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 1.2\ldots n \cos^{n+1}y \cos\left[(n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1.2\ldots n \cos^{n+1}y \sin(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

Da dieser Ausdruck mit Gleichung (10) übereinstimmt, so bleibt diese richtig, wenn n wächst, was nur noch zu beweisen übrig war. Setzt man jetzt wieder $arc\, tg\, x$ für y, und nimmt es zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, wie gewöhnlich, so wird:

$$\cos y = (1+tg^2 y)^{-\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und die Formel lautet:

$$(11)\quad \frac{d^n\, arc\, tg\, x}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\frac{\pi}{2} + arc\, tg\, x\right)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, diejenigen Functionen zu berücksichtigen, welche die Veränderliche mehr als einmal enthalten, bei deren Zerlegung man, wie wir gesehen haben, auf Summen oder Producte von Functionen stösst. Da es nun bei dem zu Anfang des Capitels angegebenen Reductionsverfahren, um dasselbe ununterbrochen fortsetzen zu können, nöthig ist, sogleich die höhern Diffq. der Potenzen der zusammengesetzten Function aus denen der Potenzen der nächst einfachern zu suchen, so muss man auch die höhern Diffq. der Potenzen von Summen oder Producten aus denen der Potenzen der Summanden oder Factoren finden können. Was die Producte betrifft, so ist die Formel (1) auch hier ohne Unterschied anwendbar, weil die Potenz eines Products gleich dem Producte der Potenzen der Factoren ist, $(yz)^m = y^m z^m$. Die Potenzen einer Summe hingegen kann man nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln. Es ist nämlich:

$$(y+z)^m = \sum_{k=0}^{k=m} m_k\, y^{-k} z^k$$

daher:

$$\frac{d^n.(y+z)^m}{dx^n} = \sum_{k=0}^{k=m} m_k \frac{d^n.y^{m-k}z^k}{dx^n}$$

wo der letzte Factor des allgemeinen Gliedes sich nach Gleichung (1) entwickeln lässt. Besteht die Summe aus mehr als zwei Gliedern, so muss man sie mehrmals in zwei Theile theilen, und bei jeder Theilung die Entwickelung erneuern.

Fünftes Capitel.

Vereinfachungen der Methode in besondern Fällen.

Im vorigen Capitel kam es darauf an, ein für alle möglichen Fälle ausreichendes Verfahren anzugeben. Diess ist, zwei Ausnahmen abgerechnet, geschehen. Wir haben gesehen, dass überall, wo die Gleichung (5) nicht anwendbar ist, entweder die Leibnitzische Formel oder der binomische Lehrsatz aushilft. Jetzt wollen wir alles in Betrachtung ziehen, was dazu dienen kann, das Verfahren abzukürzen. Ein Fall, wo die Anwendung einer Reductionsformel jederzeit entbehrlich ist, ist der, wenn, in der Formel $f(z)$, z eine lineäre Function von x, also $= a + bx$ ist; denn dann hat man:

$$\frac{d f(a+bx)}{dx} = b f^1(a+bx)$$

$$\frac{d^2 f(a+bx)}{dx^2} = b^2 f^2(a+bx)$$

$$\frac{d^3 f(a+bx)}{dx^3} = b^3 f^3(a+bx)$$

etc. etc.

also allgemein:

$$\frac{d^n f(a+bx)}{dx^n} = b^n f^n(a+bx) \tag{12}$$

Mittelst dieser Formel lassen sich fast alle bisher aufgestellten und noch herzuleitenden Formeln verallgemeinern, indem man für x eine lineäre Function davon substituirt. Wir werden sie auch

in folgender Gestalt anwenden. Setzt man cx für x, $a = 0$, $b = \frac{1}{c}$, so kommt:

$$\frac{d^n f(x)}{(d.cx)^n} = \frac{1}{c^n} f^n(x)$$

Ferner ist es meistentheils vortheilhaft, die zu differenziirende Function, wenn es möglich ist, in eine endliche Reihe zu entwickeln, deren Glieder einfachere Functionen sind, wozu namentlich der binomische Lehrsatz öfters dient. Man kann die Anwendung des letztern als eine Verallgemeinerung betrachten, deren alle erhaltenen Formeln fähig sind, welche die höhern Diffq. der Potenzen einer Function darstellen. Um die Gleichungen (9) (8) auf diese Weise zu verallgemeinern, erhält man durch binomische Entwickelung:

$$(ax^\alpha + bx^\beta)^m = \sum_{k=0}^{k=m} m_k a^{m-k} b^k x^{m\alpha+k(\beta-\alpha)}$$

$$(ae^{\alpha x} + be^{\beta x})^m = \sum_{k=0}^{k=m} m_k a^{m-k} b^k e^{[m\alpha+k(\beta-\alpha)]x}$$

und wenn man die genannten Gleichungen zur Differenziation dieser Ausdrücke anwendet, wo man erhält:

$$\frac{d^n . x^{m\alpha+k(\beta-\alpha)}}{dx^n} = 1.2\ldots n[m\alpha+k(\beta-\alpha)]_n x^{m\alpha+k(\beta-\alpha)-n}$$

$$\frac{d^n . e^{[m\alpha+k(\beta-\alpha)]x}}{dx^n} = [m\alpha+k(\beta-\alpha)]^n e^{[m\alpha+k(\beta-\alpha)]x}$$

so kommt:

$$\frac{d^n.(ax^\alpha+bx^\beta)^m}{dx^n} = 1.2\ldots n\, a^m x^{m\alpha-n} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} m_k \left(\frac{b}{a}\right)^k [m\alpha+k(\beta-\alpha)]_n x^{k(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{d^n.(ae^{\alpha x}+be^{\beta x})^m}{dx^n} = a^m e^{m\alpha x} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} m_k \left(\frac{b}{a}\right)^k [m\alpha + k(\beta-\alpha)]^n e^{k(\beta-\alpha)x}$$

Endlich kann es auch öfters zur Vereinfachung dienen, dass man in der Gleichung (5) an die Stelle von $f(x)$, welches bisher immer als einfache Function von x betrachtet worden ist, eine zusammengesetzte Function setzt, deren höhere Diffq. man bereits kennt. Bei Functionen, in denen die Veränderliche nur einmal vorkommt, lässt sich dieses Verfahren durchgängig und ausschliesslich anwenden; so dass daraus eine neue Reductionsmethode hervorgeht, die umgekehrte von der im vorigen Capitel beschriebenen. Es sei $f(x) = f_1(x_1)$, $x_1 = f_2(x_2)$, $x_2 = f_3(x_3)$, $x_3 = f_4(x)$, wo $f_1\, f_2\, f_3\, f_4$ einfache Functionen sind. Dann kann man auch setzen $f(x) = \varphi_2(x_2) = \varphi_3(x_3)$. Führt man jetzt $f_1(x_1)$ in die Reductionsformel ein, und setzt daselbst x_2 für x, so erhält man mit Voraussetzung von

$$f_1^k(x_1) \quad \text{und} \quad \frac{d^n.[f_2(x_2)]^k}{dx_2^n}$$

einen Ausdruck für $\varphi_2^n(x_2)$. Jetzt setze man x_3 für x, so findet man mit Voraussetzung von

$$\varphi_2^k(x_2) \quad \text{und} \quad \frac{d^n.[f_3(x_3)]^k}{dx_3^n}$$

einen Ausdruck für $\varphi_3^n(x_3)$. Endlich behalte man x bei, so findet man mit Voraussetzung von

$$\varphi_3^k(x^3) \quad \text{und} \quad \frac{d^n.[f_4(x)]^k}{dx^n}$$

den gesuchten Ausdruck für $f^n(x)$.

Was als bekannt vorausgesetzt wird; sind allein die höhern Diffq. der ganzen positiven Potenzen einfacher Functionen; denn die Grössen $\varphi_2^k(x_2)$ und $\varphi_3^k(x_3)$ sind jedesmal durch die vorher erhaltenen Resultate bekannt. Durch dieses Verfahren wird der Uebelstand vermieden, der sich bei dem andern zeigte, dass man immer die höhern Diffq. der Potenzen der Function suchen musste,

um fortfahren zu können. Hier hat man nur die der Function selbst zu suchen. Bei Functionen, in denen die Veränderliche mehrmals vorkommt, würde zwar dieses Verfahren im Allgemeinen nicht zum Ziele führen; indessen giebt es auch Fälle, wo dieser Umstand kein Hinderniss ist; meistentheils kann man es wenigstens theilweise anwenden, und die Reduction auf die andere Art fortsetzen.

Sechstes Capitel.

Resultirende Formeln mit theilweiser Beibehaltung des allgemeinen Functionsausdruckes.

Um aus den allgemeinen Formeln (5) (6) die bemerkenswerthesten speciellen Resultate zu ziehen, und zugleich deren Anwendung an Beispielen zu erläutern, wollen wir die aus einer einmaligen Anwendung der erstern hervorgehenden Formeln zu erschöpfen suchen. Wir suchen demnach Ausdrücke für die höhern Diffq. von Functionen, die aus zwei, im Allgemeinen einfachen, Functionen zusammengesetzt sind, von denen die eine an die Stelle von z, die andere an die Stelle von $f(x)$ tritt; bestimmen indessen nicht beide Functionen zugleich, sondern erst nur z, während $f(x)$ noch seine allgemeine Bedeutung behält. Es sei also $z = x^\alpha$, daher:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . x^{h\alpha}}{dx^n}$$
$$= 1 . 2 \ldots n \, (h\alpha)_n \, x^{h\alpha - n}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung (5), so kommt:

$$\frac{d^n f(x^\alpha)}{dx^n} = \frac{1 . 2 \ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{k\alpha}}{1 . 2 \ldots k} f^k(x^\alpha) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\alpha)_n \qquad (13)$$

Die erste Summe lässt sich für $\alpha = -1$ und $\alpha = 2$ summiren, d. h. durch ein einziges Glied ausdrücken. Anstatt jedoch die Summation direct auszuführen, ist es kürzer, auf diese beiden Fälle Gleichung (6) anzuwenden, wo jene bereits vollzogen ist. Hier hat man respective $z = \frac{1}{x}$ und $z = x^2$ zu setzen, zugleich wollen wir für y im ersten Falle $\frac{1}{y}$, im zweiten y^2 schreiben; dann lautet die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{-k}}{1.2\ldots k} f^k\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d^n.\left(\frac{y}{x}-1\right)^k}{dx^n} \\ d^n f(x^2) &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^{2k}}{1.2\ldots k} f^k(x^2) \frac{d^n.\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^k}{dx^n} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

In beiden Ausdrücken muss nach der Differenziation y in x übergehen. Nun ist:

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)^k = \left(\frac{x}{y}\right) \left(1-\frac{x}{y}\right)^k$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^k = (-1)^k \left(1+\frac{x}{y}\right)^k \left(1-\frac{x}{y}\right)^k$$

Differenziirt man diese Gleichungen nach der Formel (1), so kommt:

$$\frac{d^n.\left(\frac{y}{x}-1\right)^k}{dx^n} = \sum_{h=0}^{h=n} n_h \frac{d^{n-h}.\left(\frac{x}{y}\right)^{-k}}{dx^{n-h}} \frac{d^h.\left(1-\frac{x}{y}\right)^k}{dx^h}$$

$$\frac{d^n.\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)}{dx^n} = (-1)^k \sum_{h=0}^{h=n} n^h \frac{d^{n-h}.\left(1+\frac{x}{y}\right)^k}{dx^{n-h}} \frac{d^h.\left(1-\frac{x}{y}\right)}{dx^h}$$

Führt man die Differenziation des letzten Factors aus, so kommt:

$$\frac{d^h.\left(1-\frac{x}{y}\right)^k}{dx^h} = (-1)^h \frac{1.2\ldots h}{y^h} k^{h,}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{k-h}$$

Diese Grösse verschwindet wegen des Factors k_h für jedes h, welches $> k$, und wegen des Factors $1 - \frac{x}{y}$ für jedes h, welches $< k$ ist, sobald y in x übergeht. Für $h = k$ wird sie:

$$= (-1)^k \frac{1.2\ldots k}{x^k}.$$

Da nun dieselbe Grösse ein Factor beider allgemeinen Glieder ist, so verschwinden die ganzen Summen bis auf das eine Glied, für welches $h = k$ ist, und man erhält, wenn y in x übergeht:

$$\frac{d^n.\left(\frac{y}{x}-1\right)^k}{dx^n} = (-1)^k n_k \frac{1.2\ldots k}{x^k} \frac{d^{n-k}.\left(\frac{x}{y}\right)^{-k}}{dx^{n-k}}$$

$$\frac{d^n.\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^k}{dx^n} = n_k \frac{1.2\ldots k}{x^k} \frac{d^{n-k}.\left(1+\frac{x}{y}\right)^k}{dx^{n-k}}$$

Nun ist:

$$\frac{d^{n-k}.\left(\frac{x}{y}\right)^{-k}}{dx^{n-k}} = 1.2\ldots(n-k)(-k)_{n-k}\, y^k x^{-n}$$

$$\frac{d^{n-k}.\left(1+\frac{x}{y}\right)^k}{dx^{n-k}} = 1.2\ldots(n-k)\, k_{n-k}\, y^{k-n}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{2k-n}$$

Führt man diesen Werth ein, lässt y in x übergehen, und berücksichtigt, dass

$$1.2\ldots(n-k).1.2\ldots k.n_k = 1.2\ldots n$$

$$(-k)_{n-k} = (-1)^{n-k}(n-1)_{n-k} = (-1)^{n-k}(n-1)_{k-1}$$

ist, so findet man:

$$\frac{d^n.\left(\frac{y}{x}-1\right)^k}{dx^n} = (-1)^n.1.2\ldots n.(n-1)_{k-1}\, x^{-n}$$

$$\frac{d^n.\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^k}{dx^n} = 1.2\ldots n\, k_{n-k}\, x^{-n}\, 2^{2k-n}$$

Führt man endlich diese Werthe in die Gleichungen (14) ein, so kommt:

$$\frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{x^{-k}}{1.2\ldots k} f^k\left(\frac{1}{x}\right) \tag{15}$$

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k} \frac{(2x)^{2k}}{1.2\ldots k} f^k(x^2) \tag{16}$$

Es sei ferner $z = e^{ax}$, dann ist:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . e^{hax}}{dx^n} = (ha)^n e^{hax}$$

Diess in Gleichung (5) substituirt, giebt:

$$\frac{d^n f(e^{ax})}{dx^n} = a^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{kax}}{1.2\ldots k} f^k(e^{ax}) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h h^n \tag{17}$$

Ferner sei $z = cos^m x$, wo $m > 0$, so hat man:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . cos^{hm} x}{dx^n} =$$

$$\frac{1}{2^{hm}} \sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p-hm)^n \cos\left[(2p-hm)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

und nach Substitution in dieselbe Gleichung:

$$\frac{d^n f(cos^m x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k} f^k(cos^m x) \times \tag{18}$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h \frac{k_h}{2^{hm}} cos^{(k-h)m} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p\,(2p-hm)^n \cos\left[(2p-hm)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

Ferner sei $z=(x^\alpha+c\,x\gamma)^m$, wo $m>0$, so hat man:

$$\frac{d^n.z^h}{dx^n}=\frac{d^n.(x^\alpha+c\,x\gamma)^{hm}}{dx^n}$$

$$=1.2\ldots n\,x^{hm\alpha-n}\times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm}(hm)_p\,c^p\,[hm\alpha+p\,(\gamma-\alpha)]^n\,x^{p(\gamma-\alpha)}\times$$

und nach Substitution:

$$\frac{d^n f[(x^\alpha+c\,x\gamma)^m]}{dx^n}=1.2\ldots n\,x^{-n}\times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^k}{1.2\ldots k}f^k\,[(x^\alpha+c\,x\gamma)^m]\times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h\,k_h\,x^{hm\alpha}\,(x^\alpha+c\,x\gamma)^{(k-h)m}\times$$

$$\sum_{y=0}^{p=hm}(hm)_p\,c^p\,[(hm\alpha+p\,(\gamma-\alpha)]_n\,x^{p(\gamma-\alpha)}$$

Ferner sei $z=(e^{\alpha x}+c\,e^{\gamma x})^m$, wo $m>0$, dann ist:

$$\frac{d^n.z^h}{dx^n}=\frac{d^n.(e^{\alpha x}+c\,e^{\gamma x})^{hm}}{dx^n}=$$

$$e^{hm\alpha x}\sum_{p=0}^{p=hm}(hm)_p\,c^p\,[hm\alpha+p\,(\gamma-\alpha)]^n\,e^{p(\gamma-\alpha)x}$$

und die Substitution giebt:

(19) $$\frac{d^n f[e^{\alpha x} + c\, e^{\gamma x})^m]}{d x^n} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1 \,.\, 2 \ldots k} f^k [(e^{\alpha x} + c\, e^{\gamma x})^m] \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h\, e^{hm\alpha x} (e^{\alpha x} + c\, e^{\gamma x})^{(k-h)m}$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p\, c^p\, [hm\alpha + p(\gamma - \alpha)]^n\, e^{p(\gamma-\alpha)x}$$

In einem Falle führt auch die Bestimmung der Function f zu einer bemerkenswerthen Formel, indem sie mit einer Summation verbunden ist; nämlich wenn $f(z) = z^\alpha$ ist. Alsdann hat man:

$$f^k(z) = 1 \,.\, 2 \ldots k\, (\alpha)_k\, z^{\alpha - k}$$

Führt man diese Werthe in Gleichung (5) ein, so kommt:

$$\frac{d^n \,.\, z^\alpha}{d x^n} = z^\alpha \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha)_k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h\, z^{-h}\, \frac{d^n \,.\, z^h}{d x^n}$$

und wenn man die Summenzeichen vertauscht:

$$\frac{d^n \,.\, z^\alpha}{d x^n} = z^\alpha \sum_{k=1}^{h=n} z^{-h}\, \frac{d^n \,.\, z^h}{d x^n} \sum_{k=h}^{k=n} (-1)^{k+h} (\alpha)_k\, k_h$$

Setzt man $k+h$ für k, und für $(\alpha)_k\, k_h$ seinen Werth $(\alpha)_h\, (\alpha - h)_{k-h}$, so erhält man:

$$\frac{d^n \,.\, z^\alpha}{d x^n} = z^\alpha \sum_{h=1}^{h=n} (\alpha)_h\, z^{-h}\, \frac{d^n \,.\, z^h}{d x^n} \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (\alpha - h)_k$$

Setzt man die erste Summe $= s$, so ist, indem dieselbe Grösse addirt und wieder subtrahirt wird:

$$s = \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h)_k - \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h-1)_k$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h-1)_k$$

Im letzten Theile der rechten Seite setze man $k-1$ für k, so kommt:

$$s = \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h)_k - \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h-1)_k$$

$$- \sum_{k=1}^{k=n-h+1} (-1) \; (a-h-1)_{k-1}$$

Der letzte Theil bleibt ungeändert, wenn man 0 zur untern Grenze nimmt. Trennt man ausserdem das letzte Glied davon ab, so sind alle 3 Summen zwischen denselben Grenzen genommen, daher kann man sie addiren.

$$s = (-1)^{n+h} (a-h-1)_{n-h}$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k [(a-h)_k - (a-h-1)_k - (a-h-1)_{k-1}]$$

Das allgemeine Glied der Summe ist bekanntlich $= 0$, folglich bleibt nur übrig:

$$s = \sum_{k=0}^{k=n-h} (-1)^k (a-h)_k = (-1)^{n+h} (a-h-1)_{n-h}$$

Führt man diesen Werth ein, so kommt:

$$\frac{d^n . z^\alpha}{d x^n} = z^\alpha \sum_{h=1}^{h=n} (\alpha)_h (\alpha - h - 1)_{n-h} (-1)^{n+h} z^{-h} \frac{d^n . z^h}{d x^n}$$

Nun ist:

$$(\alpha - 1)_n n_h = (\alpha - 1)_h (\alpha - h - 1)_{n-h}$$
$$= \frac{\alpha - h}{\alpha} (\alpha)_h (\alpha - h - 1)_{n-h}$$

folglich:

$$(\alpha)_h (\alpha - h - 1)_{n-h} = \frac{\alpha}{\alpha - h} (\alpha - 1)_n n_h$$
$$= (-1)^n \frac{\alpha}{\alpha - h} (n - \alpha)_n n_h$$

Diess eingeführt giebt:

$$\frac{d^n . z^\alpha}{d x^n} = \alpha (n - \alpha)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{z^{\alpha - h}}{\alpha - h} \frac{d^n . z^h}{d x^n} \tag{20}$$

Eben so kann man verfahren, wenn $f(z) = lz$ ist, dann hat man:

$$f^k(z) = (-1)^{k+1} 1 . 2 \ldots (k-1) z^{-k}$$

und nach Substitution in Gleichung (5):

$$\frac{d^n lz}{d x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} k_h z^{-h} \frac{d^n . z^h}{d x^n}$$

und nach Vertauschung der Summenzeichen:

$$\frac{d^n lz}{d x^n} = \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h z^{-h} \frac{d^n . z^h}{d x^n} \sum_{k=h}^{k=n} \frac{1}{k} k_h$$

Nun ist:

$$\sum_{k=h}^{k=n} \frac{1}{k} k_h = \sum_{k=h}^{k=n} \frac{1}{k} k_h - \frac{1}{h} \sum_{k=h}^{k=n} k_h + \frac{1}{h} \sum_{k=h}^{k=n} k_h$$

Setzt man im letzten Theile der rechten Seite $k-1$ für k, so erhält man, indem

$$\frac{1}{k} k_h = \frac{1}{h} (k-1)_{h-1}$$

ist,

$$\sum_{k=h}^{k=n} \frac{1}{k} k_h = \frac{1}{h} \left[\sum_{k=h}^{k=n} (k-1)_{h-1} - \sum_{k=h}^{k=n} k_h + \sum_{k=h+1}^{k=n+1} (k-1)_h \right]$$

und da $(k-1)_{h-1} - k_h + (k-1)_h = 0$ ist,

$$\sum_{k=h}^{k=n} \frac{1}{k} k_h = \frac{1}{h} n_h$$

denn diese Grösse bleibt als letztes Glied des letzten Theiles übrig. Führt man diesen Werth ein, so erhält man:

$$\frac{d^n lz}{dx^n} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{h+1}}{h} n_h z^{-h} \frac{d^n . z^h}{dx^n}$$

Siebentes Capitel.

Resultirende specielle Formeln. Functionen von Potenzen.

Aus Gleichung (13) ergeben sich, durch Bestimmung der Function f, folgende specielle Formeln. Es sei:

$$f(z) = (a + bz)^\beta$$

$$f^k(z) = 1 . 2 \ldots k\, (\beta)_k\, b^k\, (a + bz)^{\beta - k}$$

Substituirt man in die genannte Gleichung, so kommt

$$\frac{d^n . (a + b x^\alpha)^\beta}{d x^n} = 1 . 2 \ldots n \frac{(a + b x^\alpha)^\beta}{x^n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(\beta)_k b^k x^{k\alpha}}{(a + b x^\alpha)^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\alpha)_n$$

Ferner sei:

$$f(z) = e^{\beta z}$$
$$f^k(z) = \beta^k e^{\beta z}$$

Die Substitution in dieselbe Gleichung giebt:

$$\frac{d^n . e^{\beta x^\alpha}}{d x^n} = 1 . 2 \ldots n \frac{e^{\beta x^\alpha}}{x^n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta \; x^{k\alpha}}{1 . 2 \ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\alpha)_n$$

Ferner sei:

$$f(z) = \cos (a + bz)$$
$$f^k(z) = b^k \cos \left(a + bz + \frac{k\pi}{2}\right)$$

so erhält man:

$$\frac{d^n \cos (a + b x^\alpha)}{d x^n} = \frac{1 . 2 \ldots n}{x^n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{b^k x^{k\alpha}}{1 . 2 \ldots k} \cos \left(a + b x^\alpha + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\alpha)_n$$

Hierbei ist zu bemerken, dass unter dieser Form des Cosinus auch der Sinus begriffen ist, da $\sin (a+bx^\alpha) = \cos \left(a - \frac{\pi}{2} + bx^\alpha\right)$.

Es sei ferner:

$$f(z) = l(a+bz)$$
$$f^k(z) = (-1)^{k+1} \frac{1 . 2 \ldots (k-1) \, b^k}{(a+bz)^k}$$

so erhält man:

$$\frac{d^n l(a+bx^\alpha)}{dx^n} = -\frac{1.2\ldots n}{x^n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{b^k x^{k\alpha}}{k(a+bx^\alpha)^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (h\alpha)_n$$

Endlich sei:

$$f(z) = arc\, tg\, (a+bz)$$

$$f^k(z) = \frac{1.2\ldots(k-1) b^k}{[1+(a+bz)^2]^{\frac{k}{2}}} \sin k \left[\frac{\pi}{2} + arc\, tg\, (a+bz)\right]$$

und man erhält:

$$\frac{d^n . arc\, tg\, (a+bx^\alpha)}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{b^k x^{k\alpha}}{k[1+(a+bx^\alpha)^2]^{\frac{k}{2}}} \times$$

$$\sin k \left[\frac{\pi}{2} + arc\, tg\, (a+bx^\alpha)\right] \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (h\alpha)_n$$

Macht man dieselben Substitutionen in Gleichung (15), wo die Werthe, welche $f^k(z)$ jedesmal annimmt, im Vorhergehenden nachzusehen sind; so erhält man folgende Formeln:

Für $f(z) = (a+bz)^\beta$

$$\frac{d^n . \left(a+\frac{b}{x}\right)^\beta}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{x^{\beta+n}} \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} (\beta)_k b^k (ax+b)^{\beta-k}$$

Für $f(z) = e^{\beta z}$

$$\frac{d^n . e^{\frac{\beta}{x}}}{dx^n} = (-1)^n 1.2\ldots n \frac{e^{\frac{\beta}{x}}}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{\beta^k x^{-k}}{1.2\ldots k}$$

Für $f(z) = cos\, (a+bz)$

$$\frac{d^n . \cos\left(a+\frac{b}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n\, 1.2\ldots(n-1)\, x^{-n}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{b^k x^{-k}}{1.2\ldots k} \cos\left(a+\frac{b}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

Für $f(x) = arc\ tg\ (a+bx)$

$$\frac{d^n . arc\ tg\left(a+\frac{b}{x}\right)}{dx^n} = (-1)^n\, 1.2\ldots(n-1)\, x^{-n}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n_k b^k x^{-k}}{\left[1+\left(a+\frac{b}{x}\right)^2\right]^{\frac{k}{2}}} \sin k \left[\frac{\pi}{2} + arc\ tg\left(a+\frac{b}{x}\right)\right]$$

wo für $\frac{n}{k}(n-1)_{k-1}$ gesetzt ist n_k. Die Function $l\left(a+\frac{b}{x}\right)$ ist übergangen worden, weil sie in eine Summe einfacher Functionen zerfällt $l(ax+b) - lx$.

Dieselben Substitutionen in Gleichung (16) vorgenommen, geben folgende Formeln:

Für $f(x) = (a+bx)^\beta$

$$\frac{d^n . (a+bx^2)^\beta}{dx^n} =$$

$$\frac{1.2\ldots n}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k} (\beta)_k\, b^k\, (2x)^{2k} (a+bx^2)^{\beta-k}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = b = 1$, $\beta = -1$, so kommt:

$$\frac{d^n . (1+x^2)^{-1}}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{(2x)^{n+2}} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k k_{n-k} \left(\frac{4x^2}{1+x^2}\right)^{k+1}$$

Hieraus kann man leicht eine Formel für $arc\ tg\ x$ ableiten; denn es ist:

$$\frac{d\, arc\, tg\, x}{dx} = (1+x^2)^{-1}$$

folglich:

$$\frac{d^n\, arc\, tg\, x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}.(1+x^2)^{-1}}{dx^{n-1}}$$

Das ist nach der eben gefundenen Gleichung:

$$\frac{d^n\, arc\, tg\, x}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(2x)^{n+1}} \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k k_{n-k-1} \left(\frac{4x^2}{1+x^2}\right)^{k+1}$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur für $n > 1$, da die, aus der sie abgeleitet ist, nur für $n > 0$ gilt. Für dieselbe Grösse haben wir einen andern Ausdruck gefunden in Cap. IV. und werden noch einen dritten aufstellen in Cap. XX.

Setzt man ferner $a = 1$, $b = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$, so erhält man, weil hier $(\beta)_k = (-1)^k (2k)_k 2^{-2k}$ ist,

$$\frac{d^n.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k} (2k)_k \frac{x^{2k}}{(1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}}$$

Hieraus kann man ebenso eine Formel für *arc sin x* ableiten; denn es ist:

$$\frac{d\, arc\, sin\, x}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

daher:

$$\frac{d^n\, arc\, sin\, x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$

das ist:

$$\frac{d_n\, arc\, sin\, x}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(2x)^{n-1}} \sum_{k=1}^{k=n-1} k_{n-k-1} (2k)_k \frac{x^{2k}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

gültig für $n > 1$. Auch diese Grösse hat Euler auf andere Art entwickelt, s. Cap. XX. Fahren wir in der Anwendung der Gleichung (16) fort.

Für $f(z) = e^{\beta z}$ wird sie

$$\frac{d^n . e^{\beta x^2}}{dx^n} = 1.2\ldots n \frac{e^{\beta x^2}}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k} \frac{\beta^k (2x)^{2k}}{1.2\ldots k}$$

Für $f(z) = cos(a + bz)$

$$\frac{d^n cos(a + bx^2)}{dx^n} = 1.2\ldots n (2x)^{-n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} n_{n-k} \frac{b^k (2x)^{2k}}{1.2\ldots k} cos\left(a + bx^2 + \frac{k\pi}{2}\right)$$

Für $f(z) = l(a + bz)$

$$\frac{d^n l(a + bx^2)}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} k_{n-k} \frac{(2x)^{2k}}{k(a + bx^2)^k}$$

Für $f(z) = arc\, tg\, (a + bz)$

$$\frac{d^n arc\, tg\, (a + bx^2)}{dx^n} = 1.2\ldots n (2x)^{-n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} n_{n-k} \frac{b^k (2x)^{2k}}{k[1 + (a + bx^2)^2]^{\frac{k}{2}}} sin\, k \left[\frac{\pi}{2} + arc\, tg\, (a + bx^2)\right].$$

Alle diese Formeln, in denen das Element $a + bx^2$ enthalten ist, lassen sich leicht in allgemeinerer Form ausdrücken, indem man $c + x$ für x substituirt. Dadurch erhält

$$a + b(c + x)^2 = a + bc^2 + 2bcx + bx^2$$

die Form $a' + b'x + c'x^2$, wo man zu setzen hat:

$$a = a' - \frac{b'^2}{4c'} \;;\; b = c' \;;\; c = \frac{b'}{2c'}$$

Dadurch erhält man Formeln für die Functionen:

$$(a' + b'x + c'x^2)^\beta$$
$$cos(a' + b'x + c'x^2)$$
$$l(a' + b'x + c'x^2)$$
$$arc\, tg\, (a' + b'x + c'x^2)$$

Achtes Capitel.

Fortsetzung. Functionen von Exponentialfunctionen.

Aus Gleichung (17) erhält man durch dieselben Substitutionen, die wir im folgenden Capitel gemacht haben, folgende Formeln:

Für $f(z) = a + bz)^\beta$

$$\frac{d^n . (a + be^{\alpha x})^\beta}{dx^n} =$$

$$a^n \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{(\beta)_k e^{k\alpha x}}{(a + be^{\alpha x})^{k-\beta}} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

Für $f(z) = e^{\beta z}$

$$\frac{d^n . e^{\beta e^{\alpha x}}}{dx^n} = a^n e^{\beta e^{\alpha x}} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{\beta^k e^{k\alpha x}}{1.2\ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

Für $f(z) = cos(a + bz)$

$$\frac{d^n . cos(a + be^{\alpha x})}{dx^n} = a^n \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{b^k e^{k\alpha x}}{1.2\ldots k} \times$$

$$cos\left(a + be^{\alpha x} + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

Für $f(z) = l(a + bz)$

$$\frac{d^n l(a + be^{\alpha x})}{dx^n} = -\alpha^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{b^k e^{k\alpha x}}{(a + be^{\alpha x})^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h$$

Für $f(x) = arc\ tg\ (a+bx)$

$$\frac{d^n\, arc\,tg\,(a+be^{\alpha x})}{dx^n} = \alpha^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k} \frac{b^k e^{k\alpha x}}{[1+(a+be^{\alpha x})^2]^{\frac{k}{2}}} \times$$

$$\sin k\left[\frac{\pi}{2} + arc\,tg\,(a+be^{\alpha x})\right] \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

Ebenso erhält man aus Gleichung (19) folgende Formeln:

Für $f(x) = (a+bx)^\beta$

$$\frac{d^n . [a+b(e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^m]^\beta}{dx^n} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k (\beta)_k b^k [a+b(e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^m]^{\beta-k} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_k e^{hm\alpha x} (e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^{(k-h)m} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p c^p [hm\alpha + p(\gamma-\alpha)]^n e^{p(\gamma-\alpha)x}$$

Für $f(x) = e^{\beta x}$

$$\frac{d^n . e^{\beta(e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^m}}{dx^n} =$$

$$e^{\beta(e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^m} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{\beta^k}{1.2\ldots k} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h e^{hm\alpha x} (e^{\alpha x}+ce^{\gamma x})^{(k-h)m} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p c^p [hm\alpha + p(\gamma - \alpha)]^n e^{p(\gamma-\alpha)x}$$

Eine vollständige Durchführung möchte, da sie nirgends von einer Vereinfachung begleitet ist, den Raum nicht werth sein, den sie erfordern würde.

Neuntes Capitel.

Fortsetzung. Functionen von Kreisfunctionen.

Aus Gleichung (18) ergeben sich folgende Formeln:
Für $f(x) = (a + bx)^\beta$

$$\frac{d^n.(a+b\cos^m x)^\beta}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k (\beta)_k b^k (a + b\cos^m x)^{\beta-k} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h 2^{-hm} \cos^{(k-hm)} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p - hm)^n \cos\left[(2p - hm)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Für $f(x) = e^{\beta x}$

$$\frac{d^n.e^{\beta\cos^m x}}{dx^n} = e^{\beta\cos^m x} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \beta^k}{1.2\ldots k} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h 2^{-hm} \cos^{(k-h)m} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p-hm)^n \cos\left[(2p-hm)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Für $f(z) = \cos(a + bz)$

$$\frac{d^n \cos(a + b\cos^m x)}{dx^n} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k b^k}{1.2\ldots k} \cos\left(a + b\cos^m x + \frac{k\pi}{2}\right) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h 2^{-hm} \cos^{(k-h)m} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p-hm)^n \cos\left[(2p-hm)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Für $f(z) = l(a + bz)$

$$\frac{d^n l(a + b\cos^m x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{b^k}{k(a + b\cos^m x)^k} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} k_h 2^{-hm} \cos^{(k-h)m} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p-hm)^n \cos\left[(2p-hm)x + \frac{n\pi}{2}\right];$$

Für $f(z) = arc\,tg\,(a + bz)$

$$\frac{d^n\, arc\,tg\,(a + b\cos^m x)}{dx^n} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k b^k}{k} [1 + (a + b\cos^m x)^2]^{-\frac{k}{2}} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h 2^{-hm} \cos^{(k-h)} x \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p (2p - hm)^n \cos\left[2p - hm) x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Um die entsprechenden Formeln für die Functionen von $\sin^m x$ abzuleiten, braucht man nur $x - \frac{\pi}{2}$ für x zu substituiren.

Zehntes Capitel.

Fortsetzung. Potenzen einiger Functionen.

Um aus Gleichung (20) specielle Resultate zu ziehen, hat man z zu bestimmen. Es sei also:

$$z = \cos^{2m} x$$

dann ist:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . \cos^{2hm} x}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{2^{2hm}} \sum_{p=0}^{p=2hm} (2hm)_p (2p - 2hm)^n \cos\left[(2p - 2hm) x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$$-\, 2^{n-2hm} \sum_{p=0}^{p=2hm} (2hm)_p \, (p-hm)^n \cos\left[2(p-hm)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

Für $p = hm$ verschwindet das allgemeine Glied; theilt man daher die Summe in zwei Theile, so erhält man:

$$\frac{d^n . x^h}{dx^n} = 2^{n-2hm} \times$$

$$\left\{ \sum_{p=0}^{p=hm-1} (2hm)_p \, (p-hm)^n \cos\left[2(p-hm)x+\frac{n\pi}{2}\right] \right.$$

$$\left. + \sum_{p=hm+1}^{p=2hm} (2hm)_p \, (p-hm)^n \cos\left[2(p-hm)x+\frac{n\pi}{2}\right] \right\}$$

Setzt man im ersten Theile $hm - p$, im zweiten $hm + p$ für p, so wird die Gleichung

$$\frac{d^n . x^h}{dx^n} = 2^{n-2hm} \times$$

$$\left\{ \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p} \, (-p)^n \cos\left(-2px+\frac{n\pi}{2}\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm+p} \, p^n \cos\left(2px+\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$$

Jetzt sind beide Theile einander gleich, weil

$$(2hm)_{hm-p} = (2hm)_{hm+p}$$

$$(-1)^n \cos\left(-2px+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(2px+\frac{n\pi}{2}\right)$$

ist; folglich ist:

$$\frac{d^n . x^h}{dx^n} = 2^{n-2hm+1} \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p} \, p^n \cos\left(2px+\frac{n\pi}{2}\right)$$

Führt man diesen Werth in Gleichung (20) ein, so kommt:

$$\frac{d^n \cos^{2m\alpha} x}{dx^n} = 2^{n+1} \alpha (n-\alpha)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\cos^{2m(\alpha-h)} x}{(\alpha-h)\, 2^{2hm}} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Setzt man jetzt $\frac{\alpha}{2m}$ für α, so geht $\frac{\alpha}{\alpha-h}$ über in $\frac{\alpha}{\alpha-2hm}$ und man erhält:

$$\frac{d^n \cos^{\alpha} x}{dx^n} = 2^{n+1} \alpha \left(n - \frac{\alpha}{2m}\right)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\cos^{\alpha-2hm} x}{(\alpha-2hm)\, 2^{2hm}} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Setzt man $-\alpha$ für α, so erhält man:

$$\frac{d^n . \sec^{\alpha} x}{dx^n} = 2^{n+1} \alpha \left(n + \frac{\alpha}{2m}\right)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\sec^{\alpha+2hm} x}{(\alpha+2hm)\, 2^{2hm}} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Setzt man in den beiden letzten Gleichungen $x - \frac{\pi}{2}$ für x, so erhält man:

$$\frac{d^n . \sin^{\alpha} x}{dx^n} = 2^{n+1} \alpha \left(n - \frac{\alpha}{2m}\right)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\sin^{\alpha-2hm} x}{(\alpha-2hm)\, 2^{2hm}} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (-1)^p \, (2hm)_{hm-p} \, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^n . \operatorname{cosec}^\alpha x}{dx^n} = 2^{n+1} \alpha \left(n + \frac{\alpha}{2m}\right)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\operatorname{cosec}^{\alpha+2hm} x}{(\alpha+2hm) \, 2^{2hm}} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (-1)^p \, (2hm)_{hm-p} \, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Es sei ferner $z = (e^{\beta x} + c e^{\gamma x})^m$, so ist:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . (e^{\beta x} + c e^{\gamma x})^{hm}}{dx^n}$$

$$= e^{hm\beta x} \sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p \, c^p \, [hm\beta + p(\gamma - \beta)]^n \, e^{p(\gamma-\beta)x}$$

Führt man diesen Werth in Gleichung (20) ein, so kommt:

$$\frac{d^n . (e^{\beta x} + c e^{\gamma x})^{m\alpha}}{dx^n} = \alpha (n - \alpha)_n \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)_h \, n^h \frac{e^{hm\beta x}}{\alpha - h} (e^{\beta x} + c e^{\gamma x})^{m(\alpha - h)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p \, c^p \, [hm\beta + p(\gamma - \beta)]^n \, e^{p(\gamma \quad \beta)x}$$

und wenn man $\frac{\alpha}{m}$ für m setzt,

$$\frac{d^n . (e^{\beta x} + c e^{\gamma x})^\alpha}{dx^n} = \alpha \left(n - \frac{\alpha}{m}\right)_n \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{e^{hm\beta x}}{\alpha - hm} (e^{\beta x} + ce^{\gamma x})^{\alpha - hm}$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p c^p [hm\beta + p(\gamma - \beta)]^n e^{p(\gamma-\beta)x}$$

Für $\beta = 1$, $\gamma = -1$ lässt sich der Ausdruck auf ähnliche Weise vereinfachen, wie im vorhergehenden Falle. Setzt man zugleich $2m$ für m, so erhält man:

$$\frac{d^n.(e^x + ce^{-x})^\alpha}{dx^n} = 2^n \alpha \left(n - \frac{\alpha}{2m}\right)_n \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{e^{2mx}}{\alpha - 2hm} (e^x + ce^{-x})^{\alpha - 2hm} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=2hm} (2hm)_p c^p (hm - p)^n e^{-2px}$$

In der ersten Summe, die wir durch s bezeichnen wollen, ist das mittelste Glied $= 0$ wegen des Factors $hm - p$. Theilt man daher s in zwei Theile, so erhält man:

$$s = \sum_{p=0}^{p=hm-1} (2hm)_p c^p (hm - p)^n e^{-2px}$$

$$+ \sum_{p=hm+1}^{p=2hm} (2hm)_p c^p (hm - p)^n e^{-2px}$$

Setzt man darauf im ersten Theile $hm - p$, im zweiten $hm + p$ für p, so kommt:

$$s = \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, c^{hm-p}\, p^n\, e^{-2(hm-p)x}$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm+p}\, c^{hm+p}\, (-p)^n\, e^{-2(hm+p)x}$$

$$= c^{hm}\, e^{-2hmx} \sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^n \left(\frac{e^{2px}}{c^p} + (-1)^p \frac{c^p}{e^{2px}}\right)$$

Dadurch wird die Gleichung

$$\frac{d^n . (e^x + ce^{-x})^\alpha}{dx^n} = 2 \quad \alpha \left(n - \frac{\alpha}{2m}\right)_n \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h\, n_h\, \frac{c^{hm}}{\alpha - 2hm}\, (e^x + ce^{-x})^{\alpha - 2hm}$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^n \left(\frac{e^{2px}}{c^p} + (-1)^p \frac{c^p}{e^{2px}}\right)$$

Endlich sei $z = (x^\beta + cx^\gamma)^m$, dann ist:

$$\frac{d^n . z^h}{dx^n} = \frac{d^n . (x^\beta + cx^\gamma)^{hm}}{dx^n}$$

$$= 1 . 2 \ldots n\, x^{hm\beta - n} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p\, c^p\, [hm\beta + p(\gamma - \beta)]_n\, x^{p(\gamma - \beta)}$$

Substituirt man diesen Werth, so kommt:

$$\frac{d^n . (x^\beta + cx^\gamma)^{m\alpha}}{dx^n} = 1 . 2 \ldots n\, \alpha (n - \alpha)_n\, x^{-n}$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)_h\, n_h \frac{x^{hm\beta}}{\alpha - h} (x^\beta + c x^\gamma)^{m(\alpha - h)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p\, c^p\, [hm\beta + p(\gamma - \beta)]_n\, x^{p(\gamma-\beta)}$$

und wenn man $\frac{\alpha}{m}$ für α setzt,

$$\frac{d^n . (x^\beta + c x^\gamma)^\alpha}{dx^n} = 1.2\ldots n\,\alpha \left(n - \frac{\alpha}{m}\right)_n x^{-n} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h\, n_h \frac{x^{hm\beta}}{\alpha - hm} (x^\beta + c x^\gamma)^{\alpha - hm}$$

$$\sum_{p=0}^{p=hm} (hm)_p\, c^p\, [hm\beta + p(\gamma - \beta)]_n\, x^{p(\gamma-\beta)}$$

In allen diesen Gleichungen ist m eine willkührliche Zahl, jedoch > 0.

Elftes Capitel.

Neue Entwickelung der gesuchten Coefficienten $\overset{n}{u}_k$.

Wir haben bisher die Functionen von Logarithmen und Kreisbogen bei der Anwendung der im dritten Capitel gegebenen Reductionsformel übergehen müssen, und zwar aus dem Grunde, weil dieselbe die Entwickelung der höheren Diffq. von z^h erforderte, die sich für $z = lx$ und $z = arc\ tg\ x$ nicht so leicht bewerk-

stelligen lässt. Gehen wir wieder auf die Herleitung der genannten Formel zurück, so war x^h nur eine specielle Form der Function $\varphi_h(x)$, für welche sich die Bestimmung der Grössen $\overset{n}{u}_k$ mittelst der Gleichungen

$$\frac{d^n \varphi_h(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{\varphi}_h(x) \overset{n}{u}_k \tag{21}$$

besonders einfach ausführen liess. Um nun zuerst auf den Fall $x = lx$ Rücksicht zu nehmen, so werden wir für $\varphi_h(x)$ eine Exponentialfunction setzen; denn nur dadurch kann $\varphi_h(lx)$ eine Function werden, deren höhere Diffq. sich leichter bestimmen lassen. Da indessen die Bestimmung der $\overset{n}{u}_k$ ohne Aenderung des Verfahrens auf eine allgemeinere Form von $\varphi_h(x)$ ausgedehnt werden kann, so wollen wir die speciellere erst später einführen. Das hier anzuwendende Verfahren setzt nämlich allein voraus, dass $\overset{k}{\varphi}_h(x)$ von der Form

$$Q_h \, R_k \, (c_h)^k$$

sei, wo Q_h und c_h nicht von k, und R_k nicht von h abhängt, und c_h für verschiedene h gleichfalls verschiedene Werthe hat.

Führt man für $\overset{k}{\varphi}_h(x)$ seinen Werth ein, so kommt:

$$\frac{d^n \varphi_h(x)}{dx^n} = Q_h \sum_{k=1}^{k=n} R_k (c_h)^k \overset{n}{u}_k$$

Diese Gleichung lässt sich auf zwei verschiedene Arten auf dieselbe einfache Form bringen.

1) Dividirt man sie durch $Q_h c_h$, und setzt:

$$\frac{1}{Q_h c_h} \frac{d^n \varphi_h(x)}{dx^n} = w_h$$

$$R_k \overset{n}{u}_k = v_k$$

$$c_h = t_h$$

so erhält man:

$$w_h = \sum_{k=1}^{k=n} (t_h)^{k-1} v_k$$

2) Dividirt man die Gleichung durch $Q_h (c_h)^n$, und setzt:

$$\frac{1}{Q_h (c_h)^n} \frac{d^n \varphi_h (x)}{dx^n} = w_h$$

$$\overset{n}{R}_k u_k = v_{n-k+1}$$

$$\frac{1}{c^h} = t_h$$

so erhält man:

$$w_h = \sum_{k=1}^{k=n} (t_h)^{n-k} v_{n-k+1}$$

und wenn man $n-k+1$ für k setzt,

$$w_h = \sum_{k=1}^{k=n} (t_h)^{k-1} v_k$$

gerade wie vorher. Setzt man für h nach einander $1, 2, 3, \dots n$, so erhält man n Gleichungen linear in Bezug auf v_k, woraus sich die n Grössen $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$ bestimmen lassen. Denkt man sich die Elimination vollzogen, so weiss man im Voraus, dass auch jedes v_k durch eine lineäre Function der verschiedenen Werthe von w_h ausgedrückt sein wird, dass man demnach setzen kann:

$$v_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h w_h$$

Um die $\overset{k}{M}_h$ zu bestimmen, substituire man den Werth von v_k in den Ausdruck von w_h, in welchem zum Unterschiede r an die Stelle von h treten mag, so kommt:

$$w_r = \sum_{k=1}^{k=n} (t_r)^{k-1} \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h \, w_h$$

Vertauscht man die Summenzeichen, so erhält man:

$$w_r = \sum_{h=1}^{h=n} w_h \sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, (t_r)^{k-1}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn man die Coefficienten jedes einzelnen w_h auf beiden Seiten gleich setzt: der von w_r ist $= 1$; der jedes andern w_h hingegen $= 0$; das ist:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_r \, (t_r)^{k-1} = 1 \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, (t_r)^{k-1} = 0 \quad \text{für} \quad h \lessgtr r.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass jedes t_r ausgenommen t_h eine Wurzel der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, \xi^{k-1} = 0$$

ist, wenn man diese nach ξ auflöst. Da diese Gleichung vom $(n-1)$sten Grade ist, so kann sie, ausser den bekannten $n-1$, nach der Voraussetzung von einander verschiedenen, Wurzeln, keine weiter haben; folglich ist:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, \xi^{k-1} = D_h \frac{(\xi - t_1)(\xi - t_2) \ldots (\xi - t_n)}{\xi - t_h} \tag{23}$$

wo D_h von ξ unabhängig ist; oder wenn man der Kürze wegen

$$\Xi = (\xi - t_1)(\xi - t_2)\ldots(\xi - t_n)$$

setzt,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, \xi^{k-1} = D_h \frac{\Xi}{\xi - t_h}$$

Differenziirt man diese Gleichung $q-1$ mal nach ξ, so verschwinden die $q-1$ ersten Glieder der linken Seite; die übrigen, mit Ausnahme des $q$ten, verschwinden alsdann für $\xi = 0$, und man erhält:

$$1.2\ldots(q-1)\overset{q}{M}_h = D_h \frac{d^{q-1}.\,\Xi(\xi - t_h)^{-1}}{d\xi^{q-1}} \qquad (\xi = 0)$$

und wenn man wieder $q = k$ setzt,

$$(24) \qquad \overset{k}{M}_h = \frac{D_h}{1.2\ldots(k-1)} \frac{d^{k-1}.\,\Xi(\xi - t_h)^{-1}}{d\xi^{k-1}} \qquad (\xi = 0)$$

Entwickelt man den Differentialquotienten nach der Formel (1), so kommt:

$$\frac{d^{k-1}.\,\Xi(\xi - t_h)}{d\xi^{k-1}} =$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (k-1)_p \frac{d^p \Xi}{d\xi^p} \frac{d^{k-p-1}.\,(\xi - t_h)^{-1}}{d\xi^{k-p-1}}$$

$$= \sum_{p=0}^{p=k-1} (k-1)_p \frac{d^p \Xi}{d\xi^p} (-1)^{k+p+1} \frac{1.2\ldots(k-p-1)}{(\xi - t_h)^{k-p}}$$

das ist für $\xi = 0$

$$= -\sum_{p=0}^{p=k-1} (k-1)_p \frac{1.2\ldots(k-p-1)}{(t_h)^{k-p}} \frac{d^p \Xi}{d\xi^p}$$

oder, da $(k-1)_p\, 1.2\ldots(k-p-1) = \dfrac{1.2\ldots(k-1)}{1.2\ldots p}$ ist,

$$\frac{d^{k-1}.\,\Xi(\xi - t_h)}{d\xi^{k-1}} =$$

$$-1.2\ldots(k-1)\sum_{p=0}^{p=k-1}\frac{(t_h)^{p-k}}{1.2\ldots p}\frac{d^p\,\Xi}{d\xi}\quad \text{für } \xi = 0$$

Führt man diesen Werth in den Ausdruck für $\overset{k}{M}_h$ ein, so erhält man:

$$\overset{k}{M}_h = -D_h\sum_{p=0}^{p=k-1}\frac{(t_h)^{p-k}}{1.2\ldots p}\frac{d^p\,\Xi}{d\xi^p}\qquad (\xi = 0)$$

Entwickelt man Ξ nach Potenzen von ξ, so wird es, als ein Product von n linearen Factoren, folgende Form erhalten:

(25) $$\Xi = (\xi - t_1)\,(\xi - t_2)\,\ldots\,(\xi - t_n)$$

$$= \sum_{q=0}^{q=n}(-1)^q\,\xi^{n-q}\,\overset{n}{C}(t_q)$$

Die Bezeichnung $\overset{n}{C}(t_q)$ des Coefficienten der $(n-q)$ten Potenz von ξ in der Entwickelung des vorstehenden Products wollen wir in der Folge beibehalten, auch wenn an die Stelle von t_q andere Functionen treten, und alsdann diese Gleichung als Definition der so bezeichneten Grösse betrachten. Differenziirt man diese Gleichung $p$mal nach ξ, und setzt dann $\xi = 0$, so verschwinden alle Glieder der Summe, ausgenommen das eine, für welches $q = n - p$ ist; folglich hat man:

(26) $$\frac{d^p\,\Xi}{d\xi^p}(\xi = 0) = (-1)^{n+p}\,1.2\ldots p\,\overset{n}{C}(t_{n-p})$$

Führt man diesen Werth in den Ausdruck für $\overset{k}{M}_h$ ein, so kommt:

$$\overset{k}{M}_h = (-1)^{n+1}D_h\sum_{p=0}^{p=k-1}(-1)^p\,(t_h)^{p-k}\,\overset{n}{C}(t_{n-p})$$

und wenn man $n-p$ für p setzt:

$$\overset{k}{M}_h = -\frac{D^h}{(t_h)^k}\sum_{p=n-k+1}^{p=n}(-1)^p (t_h)^{n-p}\,\overset{n}{C}(t_p)$$

Die Summe kann man in zwei Theile zerlegen; nämlich:

$$\overset{k}{M}_h = -D_h(t_h)^{n-k}\left[\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p (t_h)^{-p}\,\overset{n}{C}(t_p) - \sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p (t_h)^{-p}\,\overset{n}{C}(t_p)\right]$$

Der erste Theil ist nach Gleichung (25) gleich dem Werthe von Ξ, den es für $\xi = t_h$ annimmt, das ist $= 0$, denn dieses enthält den Factor $t_h - t_h$; folglich ist:

$$\overset{k}{M}_h = D_h(t_h)^{n-k}\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p (t_h)^{-p}\,\overset{n}{C}(t_p)$$

Um D_h zu finden, setze man in Gleichung (23) $\xi = t_h$, so kommt:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\overset{k}{M}_h (t_h)^{k-1} =$$

$$D_h\,(t_h - t_1)(t_h - t_2)\ldots(t_h - t_{h-1})(t_h - t_{h+1})\ldots(t_h - t_n)$$

Nun ist nach Gleichung (22) die linke Seite $= 1$, folglich:

$$D_h = \frac{1}{(t_h - t_1)\ldots(t_h - t_{h-1})(t_h - t_{h+1})\ldots(t_h - t_n)}$$

Jetzt bleibt nur noch die Bestimmung von $\overset{n}{C}(t_p)$ übrig, die wir jedoch auf eines der folgenden Capitel versparen. Zum Beschluss wollen wir die gefundenen Resultate zusammenstellen.

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x)\,\overset{n}{u}_k$$

wo entweder

$$\overset{n}{u}_k = \frac{v_k}{R_k}$$

$$w_h = \frac{1}{Q_h\, c_h} \frac{d^n \varphi_h(z)}{dx^n}$$

$$t_h = c_h$$

oder

$$\overset{n}{u}_k = \frac{v_k}{R_k} \qquad (27)$$

$$w_h = \frac{1}{Q_h (c_h)^n} \frac{d^n \varphi_h(z)}{dx^n}$$

$$t_h = \frac{1}{c_h}$$

und für beide Fälle:

$$\varphi_h^k(z) = Q_h\, R_k\, (c_h)^k$$

$$v_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h\, w_h$$

$$\overset{k}{M}_h = D_h\, (t_h)^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\, (t_h)^{-p}\, \overset{n}{C}(t_p) \qquad (28$$

$$D_h = \frac{1}{(t_h - t_1)\ldots(t_h - t_{h-1})(t_h - t_{h+1})\ldots(t_h - t_n)}.$$

Zwölftes Capitel.

Entwickelung der gesuchten Grösse nach höhern Differentialquotienten von Exponentialfunctionen.

Es sei $\varphi_h(x) = e^{a_h x}$, dann ist:

$$\overset{k}{\varphi}_h(x) = (a_h)^k \, e^{a_h x}$$

Um diesen Ausdruck unter die Form $Q_h \, R_k \, (c_h)^k$ zu bringen, hat man zu setzen:

$$Q_h = e^{a_h x} \quad ; \quad R_k = 1 \quad ; \quad c_h = a_h$$

Man wird demnach die Resultate des vorigen Capitels auf diesen Fall anwenden können, wofern nur a_h der Bedingung der c_h entspricht, nämlich dass es für verschiedene h selbst verschiedene Werthe hat. Führt man die genannten Werthe ein, so erhält man nach der ersten Art zu substituiren:

$$t_h = a_h$$

$$w_h = \frac{1}{a_h} \, e^{-a_h x} \, \frac{d^n . e^{a_h x}}{dx^n}$$

$$\text{(29)} \qquad \overset{n}{u}_k = v_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h \, \frac{1}{a_h} \, e^{-a_h x} \, \frac{d^n . e^{a_h x}}{dx^n}$$

$$\text{(30)} \qquad \overset{k}{M}_h = D_h \, (a_h)^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p \, (a_h)^{-p} \, \overset{n}{C}(a_p)$$

$$D_h = \frac{1}{(a_h - a_1) \ldots (a_h - a_{h-1}) \, (a_h - a_{h+1}) \ldots (a_h - a_n)}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \, \overset{n}{u}_k$$

so erhält man:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \times \tag{41}$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h)^{n-k-1} e^{-a_h z} \frac{d^n . e^{a_h z}}{dx^n}}{(a_h - a_1) \ldots (a_h - a_{h-1}) (a_h - a_{h+1}) \ldots (a_h - a_n)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p (a_h)^{-p} \overset{n}{C}(a_p)$$

Verfährt man nach der zweiten Art, so erhält man folgende Werthe:

$$t_h = \frac{1}{a_h}$$

$$w_h = (a_h)^{-n} e^{-a_h z} \frac{d^n . e^{a_h z}}{dx^n}$$

$$v_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h (a_h)^{-n} e^{-a_h z} \frac{d^n . e^{a_h z}}{dx^n}$$

$$\overset{n}{u}_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{n-k+1}{M_h} (a_h)^{-n} e^{-a_h z} \frac{d^n . e^{a_h z}}{dx^n}$$

$$\overset{k}{M}_h = D_h (a_h)^{k-n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p (a_h)^p \overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right)$$

$$\overset{n-k+1}{M_h} = D_h (a_h)^{-k+1} \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p (a_h)^p \overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right)$$

$$D_h = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_{h-1}}\right)\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_{h+1}}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_n}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\,(a_h)^{n-2}\;a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n}{(a_h - a_1)\ldots(a_h - a_{h-1})\,(a_h - {}_{h+1})\ldots(a_h - a_n)}$$

Führt man die Substitution aus, so erhält man:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = (-1)^{n+1}\,a_1\,a_2\ldots a_n \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \times \tag{32}$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h)^{-k-1}\,e^{-a_h z}\,\dfrac{d^n \,.\, e^{a_h z}}{dx^n}}{(a_h - a_1)\ldots(a_h - a_{h-1})\,(a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p\,(a_h)^p\,\overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right)$$

In beiden Formeln wollen wir $z = lx$ setzen, dann ist:

$$e^{a_h z} = x^{a_h}$$

$$\frac{d^n \,.\, e^{a_h z}}{dx^n} = 1\,.\,2\ldots n\,(a_h)_n\,x^{a_h - n}$$

$$e^{-a_h z} = x^{-a_h}$$

Demnach werden jene zwei Formeln

$$\text{(33)}\quad \frac{d^n f(lx)}{dx^n} = \frac{1\,.\,2\ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lx) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h)_n\,(a_h)^{n-k-1}}{(a_h - a_1)\ldots(a_h - a_{h-1})\,(a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,(a_h)^{-p}\,\overset{n}{C}(a_p)$$

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = (-1)^{n+1} \frac{1.2\ldots n}{x^n} a_1 a_2 \ldots a_n \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lx) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h)_n (a_h)^{-k-1}}{(a_h - a_1)\ldots(a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p (a_h)^p \overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right)$$

Setzt man $a_h = h$, so ist:

$$(a_h)_n = h_n = 0 \quad \text{für} \quad h < n$$

$$(a_n)_n = n_n = 1$$

folglich verschwindet die zweite Summe bis auf ihr letztes Glied. Da also $h = a_h = n$, demnach:

$$(a_h - a_1)\ldots(a_h - a_{h-1})\, a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1$$

ist, so werden die zwei Gleichungen

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = \frac{n^n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} n^{-k} f^k(lx) \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p n^{-p} \overset{n}{C}(p)$$

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = (-1)^{n+1} \frac{1.2\ldots n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} n^{-k} f^k\, lx) \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p n^p \overset{n}{C}\left(\frac{1}{p}\right)$$

In beiden Ausdrücken ist die erste Summe einer Summation fähig: man findet ihre Werthe, indem man in den Gleichungen (28) und (24) $h = n$ setzt; diess giebt:

$$\overset{k}{M}_n = D_n\,(t_n)^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,(t_n)^{-p}\,\overset{n}{C}(t_p)$$

$$\overset{k}{M}_n = \frac{D_n}{1\,.\,2\ldots(k-1)}\;\frac{d^{k-1}\,.\,\Xi\,(\xi - t_n)^{-1}}{d\xi^{k-1}} \qquad (\xi = 0)$$

$$= \frac{D_n}{1\,.\,2\ldots(k-1)}\;\frac{d^{k-1}\,.\,(\xi - t_1)(\xi - t_2)\ldots(\xi - t_{n-1})}{d\xi^{k-1}}$$

und wenn man das Product entwickelt:

$$= \frac{D_n}{1\,.\,2\ldots(k-1)} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p\,\overset{n-1}{C}(t_p)\,\frac{d^{k-1}\,.\,\xi^{n-p-1}}{d\xi^{k-1}} \qquad (\xi = 0)$$

$$= (-1)^{n+k} D_n\,\overset{n-1}{C}(t_{n-k})$$

Durch Vergleichung beider Werthe von $\overset{k}{M}_n$ ergiebt sich:

$$(t_n)^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,(t_n)^{-p}\,\overset{n}{C}(t_p) = (-1)^{n+k}\,\overset{n-1}{C}(t_{n-k})$$

das ist für $t_p = p$

$$n^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,n^{-p}\,\overset{n}{C}(p) = (-1)^{n+k}\,\overset{n-1}{C}(n-k)$$

und für $t_p = \frac{1}{p}$

$$n^{-n+k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,n^p\,\overset{n}{C}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^{n+k}\,\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{n-k}\right)$$

und wenn man $n-k+1$ für k setzt,

$$n^{-k+1}\sum_{p=0}^{p=k-1}(-1)^p\, n^p\, \overset{n}{C}\left(\frac{1}{p}\right)=(-1)^{k+1}\,\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{k-1}\right)$$

Führt man diese Werthe ein, so werden die Gleichungen

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n}=\frac{(-1)^n}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k f^k(lx)\,\overset{n-1}{C}(n-k)$$

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n}=\frac{(-1)^n}{x^n}1.2\ldots(n-1)\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k f^k(lx)\,\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{k-1}\right)$$

Vergleicht man die Coefficienten von $x^{-n}f^k(lx)$ in diesen beiden Ausdrücken mit den entsprechenden in dem Ausdrucke für dieselbe Grösse in Gleichung (33), so ergiebt sich:

$$\overset{n-1}{C}(n-k)=1.2\ldots(n-1)\,\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{k-1}\right) \tag{34}$$

$$=(-1)^{n+k}\,1.2\ldots n\times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(a_h)_n\,(a_h)^{n-k-1}}{(a_h-a_1)\ldots(a_h-a_{h-1})(a_h-a_{h+1})\ldots(a_h-a_n)}\times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p\,(a_h)^{-p}\,\overset{n}{C}(a_p)$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass, wenn $\overset{n}{C}(a_p)$ für irgend eine Form von a_p gefunden wäre, es auch sowohl für $a_p=p$ als für $a_p=\frac{1}{p}$ bekannt sein würde.

Dreizehntes Capitel.

Bestimmung der Grösse $\overset{n}{C}(a_p)$ für verschiedene Formen der Function a_p.

Zur Vervollständigung der im vorhergehenden Capitel entwickelten Formeln fehlt noch die independente Bestimmung der Grösse C für irgend eine Form von a_p. Es giebt mehr als eine solche Form, für welche jene ausführbar ist. Unter diesen wollen wir folgende drei betrachten:

$$a_p = \cos\frac{2p\pi}{2n+1}\;;\quad a_p = tg^2\,\frac{p\pi}{2n+1}\;;\quad a_p = a^p.$$

Für die beiden ersten lassen sich leicht Ausdrücke für C mittelst bekannter Eigenschaften der trigonometrischen Functionen herleiten; für den letzten werden wir die recurrirende Gleichung zu Hülfe nehmen.

Es ist nämlich:

$$\cos\frac{(n+1)(2n-4k+1)\pi}{4n+2} = (-1)^n \sin\frac{n(2n-4k+1)\pi}{4n+2}$$

$$\sin\frac{(n+1)(2n-4k+1)\pi}{4n+2} = (-1)^n \cos\frac{n(2n-4k+1)\pi}{4n+2}$$

weil die Summe der Kreisbogen auf beiden Seiten $\left(n-2k+\frac{1}{2}\right)\pi$ beträgt. Es sei n in der erstern Gleichung gerade, in der letztern ungerade; entwickelt man alle 4 Grössen nach Potenzen von

$$\sin\frac{(2n-4k+1)\pi}{4n+2} = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = \xi$$

so erhält man für ein gerades n

$$\cos\frac{(n+1)(2n-4k+1)\pi}{4n+2} =$$

$$\cos\frac{(2n-4k+1)\pi}{4n+2}\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}}(-1)^p\left(\frac{n}{2}+p\right)_{2p}(2\xi)^{2p}$$

$$\sin\frac{n(2n-4k+1)}{4n+2} =$$

$$\cos\frac{(2n-4k+1)\pi}{4n+2}\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}(-1)^p\left(\frac{n}{2}+p\right)_{2p+1}(2\xi)^{2p+1}$$

Führt man diess in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}}(-1)^p\left(\frac{n}{2}+p\right)_{2p}(2\xi)^{2p} -$$

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}(-1)^p\left(\frac{n}{2}+p\right)_{2p+1}(2\xi)^{2p+1} = 0$$

und wenn man $\frac{n}{2}-p$ für p setzt:

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}}(-1)^p\,(n-p)_p\,\frac{\xi^{n-2p}}{2^{2p}} -$$

$$\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}(-1)^p\,(n-p)_{p-1}\,\frac{\xi^{n-2p+1}}{2^{2p+1}} = 0$$

Auf ganz entsprechende Weise erhält man aus der zweiten zu Anfang aufgestellten Gleichung für ein ungerades n

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p (n-p)_p \frac{\xi^{n-2p}}{2^{2p}} +$$

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p (n-p-1)_p \frac{\xi^{n-2p-1}}{2^{2p+1}} = 0$$

Beide eben erhaltenen Gleichungen lassen sich in eine zusammenfassen, nämlich:

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}} (-1)^p (n-p)_p \frac{\xi^{n-2p}}{2^{2p}} +$$

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p (n-p-1)_p \frac{\xi^{n-2p-1}}{2^{2p+1}} = 0$$

Diese Gleichung wird erfüllt für

$$\xi = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$$

wo k beliebig, jedoch nicht 0 ist. Demnach hat ξ n verschiedene Werthe; und da die Gleichung vom $n$ten Grade, und 1 der Coefficient von ξ^n ist, so hat man für jedes ξ

$$\left(\xi - \cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(\xi - \cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(\xi - \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}} (-1)^p (n-p)_p \frac{\xi^{n-2p}}{2^{2p}} + \sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p (n-p-1)_p \frac{\xi^{n-2p-1}}{2^{2p+1}}$$

Der Definition der Grösse C [Gleichung (25)] gemäss ist folglich:

$$\overset{n}{C}\left(\cos\frac{2p\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2^p}\begin{cases}(-1)^{\frac{p}{2}}\left(n-\frac{p}{2}\right)_{\frac{p}{2}}\\(-1)^{\frac{p+1}{2}}\left(n-\frac{p+1}{2}\right)_{\frac{p-1}{2}}\end{cases}$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Einen eben so einfachen Ausdruck, der überdiess die Unterscheidung der geraden und ungeraden p nicht erfordert, erhält man durch ein ähnliches Verfahren für $a_p = tg^2\frac{p\pi}{2n+1}$. Es ist bekanntlich:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi \sum_{p=0}^{p=\frac{m}{2}} (-1)^p\, m_{2p}\, tg^{2p}\varphi$$

Setzt man $\varphi = \frac{(2n-2k+1)\pi}{4n+2}$, $m = 2n+1$, so wird:

$$tg\,\varphi = \cot\frac{k\pi}{2n+1} \quad ; \quad \cos m\varphi = 0$$

folglich:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p\,(2n+1)_{2p}\cot^{2p}\frac{k\pi}{2n+1} = 0$$

Setzt man $\xi = tg^2\frac{k\pi}{2n+1}$, und multiplicirt mit ξ^n, so kommt:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p\,(2n+1)_{2p}\,\xi^{n-p} = 0$$

Da diese Gleichung vom $n$ten Grade ist, und ihre n Wurzeln bekannt sind, so hat man für jedes ξ

$$\left(\xi - tg^2\frac{\pi}{2n+1}\right)\left(\xi - tg^2\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(\xi - tg^2\frac{n\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \, (2n+1)_{2p} \, \xi^{n-p}$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, der Definition der Grössen C gemäss, dass

$$\overset{n}{C}\left(tg^2 \frac{p\pi}{2n+1}\right) = (2n+1)_{2p}$$

Will man dieses Resultat auf Gleichung (34) anwenden, um Ausdrücke für $\overset{n}{C}(p)$, $\overset{n}{C}\left(\frac{1}{p}\right)$ zu erhalten, so handelt es sich namentlich darum, den Werth des Nenners

$$P = (a_h - a_1)(a_h - a_2)\ldots(a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)$$

zu finden. Ein jeder Factor desselben hat die Form:

$$tg^2 \frac{h\pi}{2n+1} - tg^2 \frac{\mu\pi}{2n+1} =$$

$$\frac{sin^2 \frac{h\pi}{2n+1} cos^2 \frac{\mu\pi}{2n+1} - cos^2 \frac{h\pi}{2n+1} sin^2 \frac{\mu\pi}{2n+1}}{\left(cos \frac{h\pi}{2n+1} cos \frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2}$$

$$= \frac{sin \frac{(h+\mu)\pi}{2n+1} sin \frac{(h-\mu)\pi}{2n+1}}{\left(cos \frac{h\pi}{2n+1} cos \frac{\mu\pi}{2n+1}\right)^2}$$

Setzt man für μ successive $1, 2, \ldots h-1, h+1, \ldots n$, und berücksichtigt, dass

$$sin \frac{(2n+1-\mu)\pi}{2n+1} = sin \frac{\mu\pi}{2n+1}; \; sin \frac{2h\pi}{2n+1} = 2 \, sin \frac{h\pi}{2n+1} cos \frac{h\pi}{2n+1}$$

so findet man ohne Schwierigkeit:

$$P = (-1)^{n+h} \frac{\left(tg \frac{\pi}{2n+1} \, tg \frac{2\pi}{2n+1} \ldots tg \frac{n\pi}{2n+1}\right)^2}{2 \, sin^2 \frac{h\pi}{2n+1} \, cos^{2n-3} \frac{h\pi}{2n+1}}$$

Nun ist offenbar nach der Definition der C, Gleichung (25):

$$\overset{n}{C}(a_n) = a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n$$

folglich in unserem Falle:

$$\left(tg\,\frac{\pi}{2n+1}\; tg\,\frac{2\pi}{2n+1} \dots tg\,\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2 = \overset{n}{C}\left(tg^2\,\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$
$$= (2n+1)_{2n} = 2n+1$$

Diess eingeführt, giebt:

$$P = (-1)^{n+h}\,\frac{2n+1}{2 sin^2\,\frac{h\pi}{2n+1}\; cos^{2n-3}\,\frac{h\pi}{2n+1}}$$

Nach Bestimmung der Grösse P hat die angedeutete Substitution keine Schwierigkeit; entwickelt man zugleich $\overset{n}{C}(k)$, $\overset{n}{C}\left(\frac{1}{k}\right)$ aus $\overset{n-1}{C}(n-k)$, $\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{k-1}\right)$, so findet man:

$$\overset{n}{C}(k) = (-1)^{n+k}\, 2\,\frac{1.2\dots(n+1)}{2n+3} \times$$
$$\sum_{h=1}^{h=n+1} (-1)^{h+1} cos^{2n+1}\,\frac{h\pi}{2n+3}\; tg^{2k}\,\frac{h\pi}{2n+3}\left(tg^2\,\frac{h\pi}{2n+3}\right)_{n+1} \times$$
$$\sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p\,(2n+3)_{2p}\left(tg\,\frac{h\pi}{2n+3}\right)^{-2p}$$

$$\overset{n}{C}\left(\frac{1}{k}\right) = (-1)^k\,\frac{2n+2}{2n+3}\sum_{h=1}^{h=n+1} (-1)^{h+1} cos^{2n+1}\,\frac{h\pi}{2n+3}$$
$$tg^{2n-2k}\,\frac{h\pi}{2n+3}\left(tg^2\,\frac{h\pi}{2n+3}\right)_{n+1} \times$$
$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,(2n+3)_{2p}\left(tg\,\frac{h\pi}{2n+3}\right)^{-2p}$$

Um endlich $\overset{n}{C}(a_p)$ für den dritten Werth von a_p zu bestimmen, wollen wir die recurrirenden Gleichungen der C herleiten. Es sei demnach:

$$\Xi_n = (\xi - a_1)(\xi - a_2) \ldots (\xi - a_n)$$

so hat man offenbar:

$$\Xi_n = (\xi - a_n)\,\Xi_{n-1}$$

und wenn man die Ξ nach Gleichung (25) entwickelt:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \, \xi^{n-p} \, \overset{n}{C}(a_p) =$$

$$(\xi - a_n) \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \, \xi^{n-p-1} \, \overset{n-1}{C}(a_p)$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \xi^{n-p} \, \overset{n-1}{C}(a_p) - a_n \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \xi^{n-p-1} \, \overset{n-1}{C}(a_p)$$

und wenn man im letzten Theile der rechten Seite $p - 1$ für p setzt:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \, \xi^{n-p} \, \overset{n}{C}(a_p) =$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \xi^{n-p} \, \overset{u-1}{C}(a_p) + a_n \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p \xi^{n-p} \, \overset{n-1}{C}(a_{p-1})$$

Aus der Vergleichung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von ξ ergiebt sich:

$$\overset{n}{C}(a_p) = \overset{n-1}{C}(a_p) + a_n \, \overset{n-1}{C}(a_{p-1}) \tag{35}$$

$$\overset{n}{C}(a_0) = \overset{n-1}{C}(a_0)$$

$$\overset{n}{C}(a_n) = a_n \, \overset{n-1}{C}(a_{n-1}) \tag{36}$$

Da ferner $\xi - a_1 = \Xi_1 = \xi \overset{1}{C}(a_0) - \overset{1}{C}(a_1)$ ist, so hat man:

$$\overset{1}{C}(a_0) = 1 \text{ , daher:}$$

$$\overset{n}{C}(a_0) = \overset{n-1}{C}(a_0) = \dots = \overset{1}{C}(a_0) = 1$$

Setzt man in Gleichung (35) r für n, und summirt beide Seiten derselben nach dem Index r zwischen den Grenzen $r = p + 1$ und $r = n$, so kommt:

$$\sum_{r=p+1}^{r=n} \overset{r}{C}(a_p) + \sum_{r=p+1}^{r=n} \overset{r-1}{C}(a_p) + \sum_{r=p+1}^{r=n} a_r \overset{r-1}{C}(a_{p-1})$$

Addirt man dazu die aus Gleichung (36) entnommene Gleichung:

$$\overset{p}{C}(a_p) = a_p \overset{p-1}{C}(a_{p-1})$$

so kann man diese beiden Grössen als erste Glieder in die erste und letzte Summe aufnehmen. Setzt man zugleich im ersten Theile der rechten Seite $r + 1$ für r, so kommt:

$$\sum_{r=p}^{r=n} \overset{r}{C}(a_p) = \sum_{r=p}^{r=n-1} \overset{r}{C}(a_p) + \sum_{r=p}^{r=n} a_r \overset{r-1}{C}(a_{p-1})$$

Trennt man auf der linken Seite das letzte Glied von der Summe ab, so hebt sich der Rest gegen den ersten Theil der rechten, und man hat:

$$\overset{n}{C}(a_p) = \sum_{r=p}^{r=n} a_r \overset{r-1}{C}(a_{p-1}) \tag{37}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich nun die Grösse $\overset{n}{C}(a_p)$ direct bestimmen, wenn die Grössen a_1, a_2, a_3, etc. eine geometrische Reihe bilden. Es sei daher:

$$a_p = a^p$$

wo jedoch der Voraussetzung gemäss, dass die Grössen a_1, a_2, ... a_n sämmtlich von einander verschieden sind, a weder $= 0$

noch $=1$, noch eine Wurzel der Einheit sein darf, deren Exponent $< n$ ist. Für den angenommenen Fall werden die recurrirenden Gleichungen

$$\overset{n}{C}(a^p) = \overset{n-1}{C}(a^p) + a^n \overset{n-1}{C}(a^{p-1}) \tag{38}$$

$$\overset{n}{C}(a^0) = \overset{n-1}{C}(a^0) = 1 \tag{39}$$

$$\overset{n}{C}(a^n) = a^n \overset{n-1}{C}(a^{n-1}) \tag{40}$$

$$\overset{n}{C}(a^p) = \sum_{r=p}^{r=n} a^r \overset{r-1}{C}(a^{p-1})$$

Es sei erstlich $p = 1$, so giebt die letzte Gleichung mit Zuziehung der zweiten:

$$\overset{n}{C}(a^1) = \sum_{r=1}^{r=n} a^r$$

$$= \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Für $p = 2$ giebt sie mit Zuziehung des letzten Resultats:

$$\overset{n}{C}(a^2) = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{a\,a^r}{1-a} - \sum^{r=n} \frac{a^{2r}}{1-a}$$

Führt man die Summation aus, so findet man nach einer kleinen Reduction:

$$\overset{n}{C}(a^2) = \frac{a^3}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{a\,a^{n+1}}{(1-a)^2} + \frac{a^{2(n+1)}}{(1-a)(1-a^2)}$$

Fährt man in dieser Weise fort, wobei die Summationen keine Schwierigkeit machen können, da nur geometrische Reihen vorkommen, so erhält man:

$$\overset{n}{C}(a^3) = \frac{a^6}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} - \frac{a^3\,a^{n+1}}{(1-a)^2(1-a^2)}$$

$$+ \frac{a\,a^{2(n+1)}}{(1-a)^2(1-a^2)} - \frac{a^{3(n+1)}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$$

$$\overset{n}{C}(a^4) = \frac{a^{10}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}$$

$$-\frac{a^6\, a^{n+1}}{(1-a)^2(1-a^2)(1-a^3)} + \frac{a^3\, a^{2(n+1)}}{(1-a)^2(1-a^2)^2}$$

$$-\frac{a\, a^{3(n+1)}}{(1-a)^2(1-a^2)(1-a^3)} + \frac{a^{4(n+1)}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}$$

Setzt man

$$\Delta(r) = (1-a)(1-a^2)(1-a^3)\ldots(1-a^r)$$
$$\Delta(0) = 1$$

so kann man die erhaltenen Resultate auch so schreiben:

$$\overset{n}{C}(a^0) = \frac{a^0}{\Delta(0)\,\Delta(0)}$$

$$\overset{n}{C}(a^1) = \frac{a^1}{\Delta(0)\,\Delta(1)} - \frac{a^{n+1}}{\Delta(1)\,\Delta(0)}$$

$$\overset{n}{C}(a^2) = \frac{a^3}{\Delta(0)\,\Delta(2)} - \frac{a^{1+n+1}}{\Delta(1)\,\Delta(1)} + \frac{a^{2(n+1)}}{\Delta(2)\,\Delta(0)}$$

$$\overset{n}{C}(a^3) = \frac{a^6}{\Delta(0)\,\Delta(3)} - \frac{a^{3+n+1}}{\Delta(1)\,\Delta(2)}$$
$$+ \frac{a^{1+2(n+1)}}{\Delta(2)\,\Delta(1)} - \frac{a^{3(n+1)}}{\Delta(3)\,\Delta(0)}$$

$$\overset{n}{C}(a^4) = \frac{a^{10}}{\Delta(0)\,\Delta(4)} - \frac{a^{6+n+1}}{\Delta(1)\,\Delta(3)}$$
$$+ \frac{a^{3+2(n+1)}}{\Delta(2)\,\Delta(2)} - \frac{a^{1+3(n+1)}}{\Delta(3)\,\Delta(1)} + \frac{a^{4(n+1)}}{\Delta(4)\,\Delta(0)}$$

und daraus leicht folgenden allgemeinen Ausdruck entnehmen:

$$(41)\quad \overset{n}{C}(a^p) = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2 + r(n+1)}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)}$$

Um zu beweisen, dass dieser Ausdruck, der sich für $p=0$, 1, 2, 3, 4 als richtig gezeigt hat, auch in der Folge richtig bleibt, ist nur zu zeigen, dass er die drei recurrirenden Gleichungen (38) (39) (40) befriedigt; denn die vierte ist aus den übrigen abgeleitet.

Führt man ihn zuerst in Gleichung (38) ein, so kommt:

$$\sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+1)}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)} =$$

$$\sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+rn}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)}$$

$$+\sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \frac{a^{(p-r)_2+rn+n}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r-1)}$$

Zieht man den ersten Theil der rechten Seite von der linken ab, wobei das beiden gemeinschaftliche erste Glied wegfällt, und setzt im letzten Theile $r-1$ für r, so kommt:

$$\sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+rn}\,(a^r-1)}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)}$$

$$=\sum_{r=1}^{r=p} (-1)^{r+1} \frac{a^{(p-r+1)_2+rn}}{\Delta(r-1)\,\Delta(p-r)}$$

Nun ist $\Delta(r) = -(a^r-1)\,\Delta(r-1)$. Substituirt man diesen Werth, so werden beide Seiten identisch.

Dass der Ausdruck (41) die Gleichung (39) befriedigt, ist klar, da er für $p=0$, wo auch $r=0$ wird, von n unabhängig ist. Damit er endlich die Gleichung (40) befriedige, ist zu beweisen, dass

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \frac{a^{(n-r+1)_2+r(n+1)}}{\Delta(r)\,\Delta(n-r)} =$$

$$a^n \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \frac{a^{(n-r)_2+rn}}{\Delta(r)\,\Delta(n-r-1)}$$

sei. Multiplicirt man die linke Seite, welche wir durch s bezeichnen wollen, mit folgendem der Einheit gleichen Ausdrucke:

$$\frac{1}{1-a^n}\left[a^{n-r}(1-a^r)+(1-a^{n-r})\right]$$

wobei zu beachten ist, dass der erste Theil $a^{n-r}(1-a^r)$ für $r=0$, und der zweite $1-a^{n-r}$ für $r=n$ verschwindet, und dass

$$\frac{1-a^r}{\varDelta(r)}=\frac{1}{\varDelta(r-1)}\;;\;\frac{1-a^{n-r}}{\varDelta(n-r)}=\frac{1}{\varDelta(n-r-1)}$$

ist, so erhält man:

$$s=\frac{1}{1-a^n}\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^r\frac{a^{(n-r+1)_2+(r+1)n}}{\varDelta(r-1)\varDelta(n-r)}$$

$$+\frac{1}{1-a^n}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\frac{a^{(n-r+1)_2+r(n+1)}}{\varDelta(r)\varDelta(n-r-1)}$$

Setzt man im ersten Theile $r+1$ für r, und beachtet in Betreff des zweiten, dass

$$(n-r+1)_2+r(n+1)=(n-r)_2+(r+1)n$$

ist, so erhält man:

$$s=\frac{1}{1-a^n}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^{r+1}\frac{a^{(n-r)_2+(r+2)n}}{\varDelta(r)\varDelta(n-r-1)}$$

$$+\frac{1}{1-a^n}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\frac{a^{(n-r)_2+(r+1)n}}{\varDelta(r)\varDelta(n-r-1)}$$

$$=\frac{1}{1-a^n}\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\frac{a^{(n-r)_2+(r+1)n}(1-a^n)}{\varDelta(r)\varDelta(n-r-1)}$$

$$= a^n \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \frac{a^{(n-r)_2+rn}}{\varDelta(r)\,\varDelta(n-r-1)}$$

was zu beweisen war.

Führt man auch den Ausdruck (41) in Gleichung (34) ein, so hat man, um zuerst den Nenner

$$P = (a_h - a_1)\dots(a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1})\dots(a_h - a_n)$$

zu bestimmen,

$$P = (-1)^{h+1} a^{h_2+h(n-h)} (1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{h-1})$$
$$\times (1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-h})$$
$$= (-1)^{h+1} a^{hn-(h+1)_2} \varDelta(h-1)\,\varDelta(n-h)$$

und weil

$$\frac{a^{h(n-k-1)}}{a^{hn-(h+1)_2}} = a^{h_2-hk}$$

ist, so giebt die Substitution

$$\overset{n-1}{C}(n-k) = 1.2\dots(n-1)\overset{n-1}{C}\left(\frac{1}{k-1}\right)$$

$$= (-1)^{n+k}\, 1.2\dots n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^r \frac{(a^h)_n\, a^{h_2-hk}}{\varDelta(h-1)\,\varDelta(n-h)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p a^{-hp} \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+1)}}{\varDelta(r)\,\varDelta(p-r)}.$$

Setzt man $n-k$ für k, alsdann $n+1$ für n, so kommt:

$$\overset{n}{C}(k) = (-1)^k\, 1.2\dots(n+1) \times \tag{42}$$

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} (-1)^{h+1} \frac{(a^h)_{n+1}\, a^{h_2-h(n-k+1)}}{\varDelta(h-1)\,\varDelta(n-h+1)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p\, a^{-hp} \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+2)}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)}$$

Lässt man statt dessen n und k um 1 wachsen, so erhält man:

$$\overset{n}{C}\left(\frac{1}{k}\right) = (-1)^{n+k}(n+1) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} (-1)^{h+1} \frac{(a^h)_{n+1}\, a^{h_2-h(k+1)}}{\Delta(h-1)\,\Delta(n-h+1)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\, a^{-hp} \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+2)}}{\Delta(r)\,\Delta(p-r)}$$

Auf die so eben bestimmten Werthe von $\overset{n}{C}(a_p)$ lassen sich leicht eine Anzahl anderer zurückführen; nämlich in welchen für a_p ein beliebig vielfaches oder der reciproke Werth davon steht. Setzt man in Gleichung (25) $b\,a_p$ für a_p, so kommt:

$$(\xi - ba_1)(\xi - ba_2)\ldots(\xi - ba_n) =$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p\, \xi^{n-p}\, \overset{n}{C}(ba_p)$$

Nun ist die linke Seite ausserdem

$$= b^n \left(\frac{\xi}{b} - a_1\right)\left(\frac{\xi}{b} - a_2\right)\ldots\left(\frac{\xi}{b} - a_n\right) =$$

$$b^n \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-p} \overset{n}{C}(a_p)$$

folglich erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von ξ^{n-p}

$$\overset{n}{C}(b\,a_p) = b^p\, \overset{n}{C}(a_p)$$

Setzt man ferner in Gleichung (25) $n-p$ für q, so kommt:

$$(\xi - a_1)(\xi - a_2)\ldots(\xi - a_n) = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^{n+p}\,\xi^p \overset{n}{C}(a_{n-p})$$

und wenn man mit $(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \xi^n$ dividirt,

$$\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{a_n}\right) =$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \sum_{p=0}^{p=0} (-1)^p \left(\frac{1}{\xi}\right)^{n-p} \overset{n}{C}(a_{n-p})$$

Die linke Seite ist aber auch

$$= \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \left(\frac{1}{\xi}\right)^{n-p} \overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right)$$

folglich:

$$\overset{n}{C}\left(\frac{1}{a_p}\right) = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \overset{n}{C}(a_{n-p})$$

Die bis jetzt gewonnenen Resultate geben daher Ausdrücke für

$$\overset{n}{C}\left(b \cos\frac{2p\pi}{2n+1}\right),\ \overset{n}{C}\left(b \sec\frac{2p\pi}{2n+1}\right),\ \overset{n}{C}\left(b\, tg^2\frac{p\pi}{2n+1}\right),$$

$$\overset{n}{C}\left(b \cot^2\frac{p\pi}{2n+1}\right),\ \overset{n}{C}(b\,a^p),\ \overset{n}{C}(bp),\ \overset{n}{C}\left(\frac{b}{p}\right)$$

Unter diesen verschiedenen Formen der gesuchten Grösse $\overset{n}{C}(a_p)$ verdient jedoch die eine $\overset{n}{C}(k)$ eine besondere Betrachtung. Denn ob sie gleich durch jede der übrigen vertreten werden kann, so ist leicht zu sehen, dass sämmtliche Formeln ihre einfachste Gestalt annehmen, wenn für $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots n$ gesetzt wird. $\overset{n}{C}(k)$ ist offenbar die Summe der Combinationen ohne Wiederholung in der Reihe der natürlichen Zahlen zwischen n Elementen zur k ten Classe, und als solche

eine bekannte und schon mehrfach betrachtete Grösse. Um sie in dieser Eigenschaft darzustellen, setzen wir in Gleichung (37) $a_p = p$, so wird diese, wenn man zugleich k für p schreibt,

$$\overset{n}{C}(k) = \sum_{r=k}^{r=n} r \overset{r-1}{C}(k-1)$$

Ausserdem war

$$\overset{n}{C}(0) = 1$$

Setzt man nun nach der Reihe $k = 1, 2, 3, \ldots$ und substituirt stets den eben erhaltenen Werth in die neue Gleichung, so kommt:

$$\overset{n}{C}(1) = \sum_{r_1=1}^{r_1=n} r_1$$

$$\overset{n}{C}(2) = \sum_{r_2=2}^{r_2=n} \sum_{r_1=1}^{r_1=r_2-1} r_1 r_2$$

etc. etc.

$$\overset{n}{C}(k) = \sum_{r_k=k}^{r_k=n} \sum_{r_{k-1}=k-1}^{r_{k-1}=r_k-1} \cdots\cdots \sum_{r_2=2}^{r_2=r_3-1} \sum_{r_1=1}^{r_1=r_2-1} r_1 r_2 r_3 \ldots r_k$$

Ungeachtet des einfachen Gesetzes, wonach diese Grösse durch eine blosse Verbindung der Indices, ohne Hinzutreten anderer Elemente, aus der Reihe der natürlichen Zahlen erwächst, scheint dennoch weder ein einfacher, independenter Ausdruck derselben zu existiren, noch überhaupt eine vollständige Entwickelung auf gewöhnlichem Wege möglich zu sein, wenn gleich der successiven Summation der einzelnen Reihen nichts im Wege steht. Der so eben aufgestellte Ausdruck kann nicht für eine solche gelten, da die Anzahl der Summenzeichen $= k$, also veränderlich ist; er hat wesentlich keinen andern Sinn als die recurrirende Gleichung, aus der er abgeleitet ist. Da sich indessen die independente Darstel-

lung der genannten Grösse nicht umgehen liess, weil die letztere bei der Differenziation aller Functionen von Logarithmen erscheint, so mussten die zwei in diesem Cap. hergeleiteten, die freilich keinen Blick in die Natur der Grösse gestatten, zu diesem Zwecke aufgestellt werden. Eigenthümlich an dem letztern (42) ist, dass er durch Substitution reeller Werthe für die willkührliche Grösse a keiner Vereinfachung oder Formänderung fähig wird, weil nämlich a weder $= 0$, noch $= 1$ sein kann. Durch eine imaginäre Bestimmung von a lässt sich eine solche erreichen. Setzt man für a die $(n+1)$ste Wurzel der Einheit, so verwandelt sich die dreifache Summe in eine einfache. Wir wollen indessen die Substitution nicht ausführen, da dasselbe Resultat auch auf anderem Wege gewonnen werden kann. Es sei demnach

$$a = \cos\frac{2\pi}{n+1} + i \sin\frac{2\pi}{n+1}$$

oder $a^{n+1} = 1$, und der Kürze wegen:

$$P_h = (a^h - 1)(a^h - 2)(a^h - 3)\ldots(a^h - n)$$

Entwickelt man das Product nach Gleichung (25), so kommt:

$$P_h = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p a^{h(n-p)} \overset{n}{C}(p)$$

Nun ist

$$a^{h(n-p)} = a^{h(n+1)} a^{-h(p+1)}$$
$$= a^{-h(p+1)}$$

folglich

$$P_h = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p a^{-h(p+1)} \overset{n}{C}(p)$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $a^{h(k+1)}$, wo $0 \gtreqless k \gtreqless n$ sei, und summirt sie nach h zwischen den Grenzen 1 und $n+1$, so kommt:

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} P_h a^{h(k+1)} = \sum_{h=1}^{h=n+1} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p a^{h(k-p)} \overset{n}{C}(p)$$

und wenn man die Summenzeichen vertauscht,

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} P_h\, a^{h(k+1)} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \overset{n}{C}(p) \sum_{h=1}^{h=n+1} a^{h(k-p)}$$

Nun ist bekanntlich ohne Rücksicht auf die Bedeutung von a

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} a^{h(k-p)} = a^{k-p}\, \frac{1 - a^{(n+1)(k-p)}}{1 - a^{k-p}} = 0$$

ausgenommen, wenn $a^{k-p} = 1$ ist, was wieder nur stattfinden kann, wenn $k - p = 0$ ist, weil $-n-1 < k-p < n+1$ ist. Folglich verschwindet die erste Summe für jeden von k verschiedenen Werth von p, und von der zweiten Summe bleibt nur das eine Glied übrig, dessen Index $p = k$ ist. Demnach ist

$$\sum_{h=1}^{h=n+1} P_h\, a^{h(k+1)} = (-1)^k \overset{n}{C}(k) \sum_{h=1}^{h=n+1} 1$$

$$= (-1)^k (n+1) \overset{n}{C}(k)$$

Setzt man für P_h wieder seinen Werth, so kommt:

$$\overset{n}{C}(k) = \frac{(-1)^k}{n+1} \sum_{h=1}^{h=n+1} a^{h(k+1)} (a^h - 1)(a^h - 2) \ldots (a^h - n)$$

was man auch schreiben kann:

$$\overset{n}{C}(k) = (-1)^k\, 1 \,.\, 2 \ldots n \sum_{h=1}^{h=n+1} a^{hk} (a^h)_{n+1}$$

Vierzehntes Capitel.

Reductionsformeln für Functionen von Logarithmen.

Jede der zwei im XII. Cap. entwickelten Reductionsformeln (31) (32) lässt sich nun, den Resultaten des XIII. Capitels zufolge, auf sieben verschiedene Arten schreiben. Wir wollen uns begnügen, die Substitution an Gleichung (31) für 3 Werthe von a_p, nämlich:

$$a_p = tg^2 \frac{p\pi}{2n+1} \quad ; \quad a_p = a^p \quad ; \quad a_p = p$$

auszuführen. Die hierbei zu bestimmenden Grössen sind bereits aus dem vorigen Capitel bekannt: es war für $a_p = tg^2 \frac{p\pi}{2n+1}$

$$P = (a_h - a_1) \ldots (a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1}) \ldots (a_h - a_n)$$
$$= (-1)^{n+h} \frac{2n+1}{2 \sin^2 \frac{h\pi}{2n+1} \cos^{2n-3} \frac{h\pi}{2n+1}}$$

Demnach wird Gleichung (31)

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \frac{(-1)^n 2}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \frac{\sin^{2n-1} \frac{h\pi}{2n+1}}{tg^{2k-1} \frac{h\pi}{2n+1}} e^{-z\, tg^2 \frac{h\pi}{2n+1}} \frac{d^n.}{dx^n} e^{z\, tg^2 \frac{h\pi}{2n+1}} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p (2n+1)_{2p} \left(tg \frac{h\pi}{2n+1}\right)^{-2p}$$

Ferner war für $a_p = a^p$

$$P = (-1)^{h+1} a^{hn-(h+1)_2} \varDelta(h-1) \varDelta(n-h)$$

$$\frac{a^{h(n-k-1)}}{a^{hn-(h+1)_2}} = a^{h_2-hk}$$

und die Gleichung (31) wird

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{h+1} \frac{a^{h_2-hk}}{\varDelta(h-1)\varDelta(n-h)} e^{-a^h z} \frac{d^n.}{dx^n} e^{a^h z} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p a^{-hp} \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+1)}}{\varDelta(r)\varDelta(p-r)}$$

Für $a_p = p$ hat man:

$$P = (h-1)(h-2)\ldots 2.1.1.2\ldots(n-h)(-1)^{n+h}$$

$$= \frac{(-1)^{n+h}}{h n_h} 1.2\ldots n$$

Diess in Gleichung (31) eingeführt, giebt:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h h^{n-k} e^{-hz} \frac{d^n.e^{hz}}{dx^n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p h^{-p} \overset{n}{C}(p) \qquad (43)$$

Setzt man in diesen drei Gleichungen lz für z, so erhält man:

$$\frac{d^n f(lz)}{dx^n} = \frac{(-1)^n 2}{2n+1} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lz) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h \frac{\sin^{2n-1}\frac{h\pi}{2n+1}}{tg^{2k-1}\frac{h\pi}{2n+1}}\, z^{-tg^2\frac{h\pi}{2n+1}}\frac{d^n.}{dx^n} z^{tg^2\frac{h\pi}{2n+1}} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p\,(2n+1)_{2p}\left(tg\frac{h\pi}{2n+1}\right)^{-2p}$$

$$\frac{d^n f(lz)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{k=n} f^k(lz)\times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{h+1}\frac{a^{h_2-hk}}{\varDelta(h-1)\,\varDelta(n-h)}\, z^{-a^h}\frac{d^n.}{dx^n} z^{a^h}\times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p a^{-hp}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r\frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+1)}}{\varDelta(r)\,\varDelta(p-r)}$$

$$(44)\qquad \frac{d^n f(lz)}{dx^n}=\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\sum_{k=1}^{k=n} f^k(lz)\times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h n_h\, h^{n-k} z^{-h}\frac{d^n.z^h}{dx^n}\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p h^{-p}\overset{n}{C}(p)$$

Die letzte Gleichung geht, wie im XII. Cap. gezeigt worden ist, für $z=x$ in folgende über:

$$(45)\qquad \frac{d^n f(lx)}{dx^n}=\frac{(-1)^n}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k f^k(lx)\,\overset{n-1}{C}(n-k)$$

Diese Gleichungen sind nun sämmtlich dazu bestimmt, in der Reduction der höhern Diffq. einer zusammengesetzten Function, die

Logarithmen enthalten, an die Stelle der Gleichung (5) zu treten. Wie die drei ersten diesen Zweck erfüllen, ist klar; denn, während $f(lz)$ jede Function eines Logarithmus jeder Function ausdrückt, somit jeden möglichen Fall in sich begreift, sind von der rechten Seite die zu differenziirenden logarithmischen Functionen gänzlich entfernt, und es bleiben nur noch die Function $f(x)$ und eine Potenz von z zu differenziiren übrig. Ist nun der Exponent von z eine ganze positive Zahl, wie in der dritten Gleichung, so tritt diese Gleichung ohne Weiteres an die Stelle von (5). Ist er gebrochen, wie in der ersten, so erhält man die eine Prämisse erst mittelst Gleichung (20). In der zweiten Gleichung kann man jederzeit a^h zu einer positiven ganzen Zahl machen. Es sei z. B. $sin^\alpha l(1+e^x)$ zu differenziiren. Man setze $sin^\alpha x = f(x), 1+e^x = z$, so erfordert die erste Formel die Differenziation von $sin^\alpha x$ und $(1+e^x)^\beta$, was beides mittelst Gleichung (20) geschehen kann; die zweite von $sin^\alpha x$ und $(1+e^x)^{a^h}$, wo die letztere Grösse, wenn für a eine beliebige ganze Zahl gesetzt wird, nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden kann; die dritte Formel von $sin^\alpha x$ und $(1+e^x)^h$, wo dasselbe ohne Einschränkung gilt. Um endlich Gleichung (45) anzuwenden, führe man die Function in Gleichung (5) ein, und setze $z = 1+e^x$, $f(x) = sin^\alpha lx$, so erhält man als Prämissen die höhern Diffq. von $(1+e^x)^h$ und $sin^\alpha lx$ nach x; führe endlich $sin^\alpha lx$ in Gleichung (45) ein, indem man $f(x) = sin^\alpha x$ setzt, so hat man, wie vorher, nur $sin^\alpha x$ und $(1+e^x)^h$ zu differenziiren.

Wir werden indessen hier nur die Gleichungen (44) und (45) zur Reduction benutzen; diese haben nämlich den Vorzug, dass die Grössen, welche sich bei jeder speciellen vollständigen Entwickelung herausheben müssen, wie die Tangenten und die Willkührliche a, hier in der Grösse $\overset{n}{C}(p)$ vereinigt, und namentlich nicht mit den veränderlichen Elementen auf störende Weise gemischt sind.

Funfzehntes Capitel.

Von den Exponentialfunctionen mit veränderlichem Dignanden.

Unter den Fällen, wo die zuletzt entwickelten Formeln in Anwendung kommen müssen, verdient derjenige eine besondere Betrachtung, wo die zu differenziirende Function von der Form x^y ist, weil hier, um der erforderlichen mehrfachen Substitution willen, eine Formel, in welcher dieselbe bereits vollständig vollzogen ist, von grösserem Nutzen sein muss als anderswo. Wir haben in Cap. I. gesehen, dass eine solche Function erst in eine Function von Logarithmen verwandelt werden muss, indem man setzt

$$x^y = e^{ylx}$$

Führt man den letzten Ausdruek in Gleichung (5) ein, so hat man daselbst ylx für x und e^x für $f(x)$ zu setzen; daher wird

$$f^k(ylx) = x^y$$

und die Gleichung selbst wird:

$$\frac{d^n . x^y}{dx^n} = x^y \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k} (ylx)^k \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (ylx)^{-h} \frac{d^n . (ylx)^h}{dx^n}$$

Den letzten Factor hat man nach Gleichung (1) zu entwickeln, welche nach Abtrennung des ersten Gliedes giebt:

$$\frac{d^n . (ylx)^h}{dx^n} = (lx)^h \frac{d^n . y^h}{dx^n}$$

$$+ \sum_{q=1}^{q=n} n_q \frac{d^{n-q} . y^h}{dx^{n-q}} \frac{d^q . (lx)^h}{dx^q}$$

Den Werth des letzten Factors erhält man aus Gleichung (44), wo man (wenn m an die Stelle des dortigen k tritt)

$$f\,(lx) = (lx)^h$$
$$f^m(lx) = 1\,.\,2\ldots m\,h_m\,(lx)^{h-m}$$
$$n = q$$

zu setzen hat: nämlich

$$\frac{d^q\,.\,(lx)^h}{dx^q} = \frac{(-1)^q}{1\,.\,2\ldots q}\sum_{m=1}^{m=q} 1\,.\,2\ldots m\,h_m\,(lx)^{h-m}\times$$

$$\sum_{g=1}^{g=q}(-1)^g\,q_g\,g^{q-m}\,x^{-g}\,\frac{d^q\,.\,x^g}{dx^q}\sum_{p=0}^{p=q-m}(-1)^p\,g^{-p}\,\overset{q}{C}(p)$$

Substituirt man für die eben bestimmten zwei Grössen ihre Werthe, so erhält man:

$$\frac{d^n\,.\,x^y}{dx^n} = x^y\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^k\,(y\,lx)^k}{1\,.\,2\ldots k}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h\,k_h\,y^{-h}\times$$

$$\Bigg[\frac{d^n\,.\,y^h}{dx^n}+\sum_{q=1}^{q=n}\frac{(-1)^q\,n_q}{1\,.\,2\ldots q}\,\frac{d^{n-q}\,.\,y^h}{dx^{n-q}}\sum_{m=1}^{m=q}1\,.\,2\ldots m\,\frac{h_m}{(lx)^m}\times$$

$$\sum_{g=1}^{g=q}(-1)^g\,q_g\,g^{q-m}\,x^{-g}\,\frac{d^q\,.\,x^g}{dx^q}\sum_{p=0}^{p=q-m}(-1)^p\,g^{-p}\,\overset{q}{C}(p)\Bigg]$$

Ist y eine lineäre Function von x, so verschwindet $\frac{d^n\,.\,y}{dx^n}$ für jedes h ausser für $h=k=n$; also bleibt von der ganzen Doppelsumme, von deren allgemeinem Gliede diese Grösse ein Factor ist, nur das letzte Glied übrig. Setzt man demnach $y=b+cx$, so wird dieses letzte Glied $c^n x^y\,(lx)^n$, ferner wird

$$\frac{d^{n-q} \, . \, y^h}{dx^{n-q}} = 1 \, . \, 2 \ldots (n-q) \, h_{n-q} \, c^{n-q} \, y^{h-n+q}$$

$$n_q \; 1 \, . \, 2 \ldots (n-q) = \frac{1 \, . \, 2 \ldots n}{1 \, . \, 2 \ldots q}$$

und indem die $n-h-1$ ersten Glieder der Summe nach q verschwinden, so wird die Gleichung

$$\frac{d^n \, . \, z^{b+cx}}{dx^n} = c^n \, z^{b+cx} \, (lz)^n + 1 \, . \, 2 \ldots n \, z^{b+cx} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \, (lz)^k}{1 \, . \, 2 \ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h \, k_h \times$$

$$\sum_{q=n-h}^{q=n} \frac{(-1)^q \, h_{n-q}}{(1 \, . \, 2 \ldots q)^2} \, \frac{(b+cx)^{q-n+k}}{c^{q-n}} \sum_{m=1}^{m=q} 1 \ldots m \, \frac{h_m}{(lz)^m} \times$$

$$\sum_{g=1}^{g=q} (-1)^g \, q_g \, g^{q-m} \, z^{-g} \, \frac{d^q \, . \, z^g}{dx^q} \sum_{p=0}^{p=q-m} (-1)^p \, g^{-p} \, \overset{q}{C}(p)$$

Ist $z = x$, so kann man den Werth von $\frac{d^q \, . \, (lz)}{dx^q}$ auch aus Gleichung (45) entnehmen; es ist nämlich

$$\frac{d^q . (lx)^h}{dx^q} = \frac{(-1)^q}{x^q} \sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m 1 \, . \, 2 \ldots m \, . \, h_m \, (lx)^{h-m} \overset{q-1}{C}(q-m) \quad (46)$$

Setzt man diesen Ausdruck an die Stelle des vorigen für die genannte Grösse, so erhält man:

$$\frac{d^n . \, x^y}{dx^n} = x^y \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \, (ylx)^k}{1 \, . \, 2 \ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h \, k_h \, y_1^{-h} \times \quad (47)$$

$$\left[\frac{d^n . y^h}{dx^n} + \sum_{q=1}^{q=n} (-1)^q n_q x^{-q} \frac{d^{n-q} . y^h}{dx^{n-q}} \times \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m 1.2\ldots m\, h_m\, (lx)^{-m} \overset{q-1}{C} (q-m)\right]$$

Es sei $y = (b + cx)^\beta$, dann ist:

$$\frac{d^n . y^h}{dx^n} = 1.2\ldots n\, (h\beta)_n\, c^n\, (b + cx)^{h\beta - n}$$

$$\frac{d^{n-q} . y^h}{dx^{n-q}} = 1.2\ldots(n-q)\, (h\beta)_{n-q}\, c^{n-q} (b + cx)^{h\beta - n + q}$$

Führt man diess ein, und berücksichtigt, dass

$$1.2\ldots(n-q)\, n_q = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots q}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{d^n . x^{(b+cx)^\beta}}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} x^{(b+cx)^\beta} \times \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k (lx)^k}{1.2\ldots k} (b + cx)^{k\beta} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h \times$$

$$\left[(\beta h)_n + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^q (h\beta)_{n-q}}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m 1.2\ldots m\, h_m (lx)^{-m} \overset{q-1}{C} (q-m)\right]$$

Ist $\beta = 1$, so verschwindet $(h\beta)_n$ ausser für $h = k = n$; es bleibt daher von der Doppelsumme, von deren allgemeinem Gliede es ein Factor ist, nur ein Glied übrig, und man erhält:

$$\frac{d^n . x^{b+cx}}{dx^n} = c^n (lx)^n x^{b+cx} + \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} x^{b+cx} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k (lx)^k}{1.2\ldots k} (b+cx)^k \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h \times$$

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^q h_{n-q}}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m 1.2\ldots m\, h_m (lx)^{-m} \overset{q-1}{C} (q-m)$$

Vertauscht man das Summenzeichen der h mit denen der q und der m, so kommt:

$$\frac{d^n . x^{b+cx}}{dx^n} = c^n (lx)^n x^{b+cx}$$

$$+ \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} x^{b+cx} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k (lx)^k}{1.2\ldots k} \times$$

$$(b+cx)^k \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^q}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} \overset{q-1}{C} (q-m) \sum_{h=1}^{h=k} (-1) k_h h_{n-q} h_m$$

Den Werth der ersten Summe kann man auf folgende Art finden. Bezeichnet man sie durch s, so hat man:

$$k_h h_m = k_m (k-m)_{h-m} = k_m (k-m)_{k-h}$$

folglich:

$$s = k_m \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h h_{n-q} (k-m)_{k-h}$$

oder, wenn man $k-h$ für h setzt:

$$s = k_m \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{h+k} (k-h)_{n-q} (k-m)_h$$

oder, da der letzte Factor für $h > k-m$ verschwindet,

$$s = (-1)^k k_m \sum_{h=0}^{h=k-m} (-1)^h (k-h)_{n-q} (k-m)_h$$

Nun hat man:

$$(k-m)_h = (k-m-1)_h + (k-m-1)_{h-1}$$
$$(k-h)_{n-q} = (k-h-1)_{n-q} + (k-h-1)_{n-q-1}$$

Multiplicirt man den ersten Theil der rechten Seite der ersten Gleichung mit der rechten, das übrige mit der linken Seite der zweiten Gleichung, so kommt:

$$(k-h)_{n-q} (k-m)_h = (k-h-1)_{n-q} (k-m-1)_h$$
$$+ (k-h-1)_{n-q-1} (k-m-1)_h + (k-h)_{n-q} (k-m-1)_{h-1}$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $(-1)^h$, und summirt sie nach h zwischen 0 und $k-m$, so erhält man:

$$\sum_{h=0}^{h=k-m} (-1)^h (k-h)_{n-q} (k-m)_h =$$

$$\sum_{h=0}^{h=k-m-1} (-1)^h (k-h-1)_{n-q} (k-m-1)_h$$

$$+ \sum_{h=0}^{h=k-m-1} (-1)^h (k-h-1)_{n-q-1} (k-m-1)_h$$

$$+\sum_{h=1}^{h=k-m} (-1)^h (k-h)_{n-q} (k-m-1)_{h-1}$$

wo die wegen des letzten Factors verschwindenden Glieder bereits entfernt sind. Setzt man im letzten Theile der rechten Seite $h+1$ für h, so hebt er sich gegen den ersten, und es bleibt bloss übrig:

$$\sum_{h=0}^{h=k-m} (-1)^h (k-h)_{n-q} (k-m)_h =$$

$$\sum_{h=0}^{h=k-m-1} (-1)^h (k-h-1)_{n-q-1} (k-m-1)_h$$

Die rechte Seite hat dieselbe Form wie die linke, nur dass sie $k-1$ für k und $n-1$ für n hat. Daraus sieht man, dass man, ohne den Werth der linken Seite zu ändern, k und n zugleich um gleiche Zahlen vermindern kann. Zieht man demnach von beiden $k-m$ ab, so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=k-m} (-1)^h (k-h)_{n-q} (k-m)_h = m_{n-q-k+m} \tag{49}$$

$$= m_{k+q-n}$$

folglich wird

$$s = (-1)^k k_m m_{k+q-n}$$

Führt man diesen Werth ein, so erhält man:

$$\frac{d^n . x^{b+cx}}{dx^n} = c^n (lx)^n x^{b+cx}$$

$$+ \frac{1.2\ldots n c^n}{(b+cx)^n} x^{b+cx} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(lx)^k}{1.2\ldots k} \times$$

$$(b+cx)^k \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^q}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} k_m\, m_{k+q-n} \overset{q-1}{C}(q-m)$$

Es sei ferner in Gleichung (48) $\beta = -1$, so wird

$$(h\beta)_{n-q} = (-1)^{n+q} (h+n-q-1)_{n-q}$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (h\beta)_n = (-1)^n \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (h+n-1)_n$$

d. i. wenn man $k-h$ für h setzt,

$$= (-1)^{n+k} \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h k_h (k-h+n-1)_n$$

Den Werth dieser Grösse findet man aus Gleichung (49), indem man daselbst $k+n-1$ für k, $n-1$ für m, und $q=0$ setzt; dann lautet sie, indem das letzte Glied verschwindet,

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h k_h (k-h+n-1)_n = (n-1)_{k-1}$$

folglich ist:

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (-h)_n = (-1)^{n+k} (n-1)_{k-1}$$

Führt man mit Beachtung dieser Gleichung die oben bezeichnete Substitution aus, so erhält man:

$$\frac{d^n . \sqrt[b+cx]{x}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} \sqrt[b+cx]{x} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(b+cx)^{-k} (lx)^k}{1.2\ldots k} \Big[(n-1)_{k-1} + \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h \times$$

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{(h+n-q-1)_{n-q}}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \, 1.2\ldots m \, h_m (lx)^{-m} \overset{q-1}{C} (q-m) \Big]$$

Vertauscht man das Summenzeichen der h mit dem der k und dem der m, so kommt:

$$\frac{d^n . \sqrt[b+cx]{x}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} \sqrt[b+cx]{x} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1.2\ldots k} \times$$

$$\left(\frac{lx}{b+cx}\right)^k \Big[(n-1)_{k-1} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} \overset{q-1}{C} (q-m) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h_m (h+n-q-1)_{n-q} \Big]$$

Verfährt man mit der ersten Summe eben so wie im vorhergehenden Falle, so erhält man:

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h \, h_m \, (h+n-q-1)_{n-q} =$$

$$(-1)^k k_m \sum_{h=0}^{h=k-m} (-1)^h (k-m)_h (k-h+n-q-1)_{n-q}$$

Setzt man in Gleichung (49) $k+n-q-1$ für k und $m+n-q-1$ für m, so findet man, dass der letzte Ausdruck

$$= (-1)^k k_m (m+n-q-1)_{k-1}$$

ist. Führt man diesen Werth ein, so kommt:

$$\frac{d^n . \sqrt[b+cx]{x}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n\, c^n}{(b+cx)^n} \sqrt[b+cx]{x} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1.2\ldots k} \times$$

$$\left(\frac{lx}{b+cx}\right)^k \left[(n-1)_{k-1} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{1}{1.2\ldots q} \left(\frac{b+cx}{cx}\right)^q \times\right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} (m+n-q-1)_{k-1} k_m \overset{q-1}{C}(q-m)\right]$$

Es sei ferner in Gleichung (47) $y = \alpha e^{\beta x}$, dann hat man:

$$\frac{d^n . y^h}{dx^n} = \alpha^h h^n \beta^n e^{h\beta x}$$

$$\frac{d^{n-q} . y^h}{dx^{n-q}} = \alpha^h h^{n-q} \beta^{n-q} e^{h\beta x}$$

Daher wird die genannte Gleichung

$$\frac{d^n . x^{\alpha e^{\beta x}}}{dx^n} = \beta^n x^{\alpha e^{\beta x}} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{\alpha^k (lx)^k}{1.2\ldots k} e^{k\beta x} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n \times$$

$$\left[1 + \sum_{q=1}^{q=n} (-1)^q n_q (h\beta x)^{-q} \times\right.$$

$$\sum_{m=1}^{m=q} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} h_m \overset{q-1}{C}(q-m)\Big]$$

Ist in x^y y von der Form $(lx)^\alpha$, so kann man auch so verfahren. Zuerst erhält man aus Gleichung (5)

$$\frac{d^n . x^{(lx)^\alpha}}{dx^n} = \frac{d^n . e^{(lx)^{\alpha+1}}}{dx^n}$$

$$= x^{(lx)^\alpha} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k} (lx)^{k(\alpha+1)} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (lx)^{-h(\alpha+1)} \frac{d^n . (lx)^{h(\alpha+1)}}{dx^n}$$

Entwickelt man den letzten Factor nach Gleichung (45), so erhält man:

$$\frac{d^n . (lx)^{h(\alpha+1)}}{dx^n} =$$

$$\frac{(-1)^n}{x^n} \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m 1.2\ldots m\,[h(\alpha+1)]_m (lx)^{-m} \overset{n-1}{C}(n-m)$$

Führt man diesen Werth ein, und vertauscht dann die Summenzeichen der m und der h, so erhält man:

$$\frac{d^n . x^{(lx)^\alpha}}{dx^n} = (-1)^n x^{(lx)^\alpha - n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{1.2\ldots k} (lx)^{k(\alpha+1)} \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \frac{1.2\ldots m}{(lx)^m} \overset{n-1}{C}(n-m) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h [h(\alpha+1)]_m$$

Der Werth der ersten Summe ist für $a = -2$ und $a = 1$ bekannt; vergleicht man nämlich din allgemeinen Glieder der Ausdrücke

$$\frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} \quad \text{und} \quad \frac{d^n f(x^2)}{dx^n}$$

welche sich aus Gleichung (17) ergeben, mit denen, welche die Gleichungen (15) (16) für die nämlichen Grössen liefern, so erhält man folgende Summationsformeln:

$$(50) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (-h)_n = (-1)^{n+k} (n-1)_{k-1}$$

$$(51) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h (2h)_n = (-1)^k k_{n-k} 2^{2k-n}$$

Um dieselben anzuwenden, hat man nur m für n zu setzen, und in der Gleichung selbst $a = -2$ und $a = 1$, dann kommt:

$$\frac{d^n . x^{(lx)-2}}{dx^n} = (-1)^n x^{(lx)-2-n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(lx)^{-k}}{1.2\ldots k} \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} 1.2\ldots m (m-1)_{k-1} (lx)^{-m} \overset{n-1}{C}(n-m)$$

$$\frac{d^n . x^{lx}}{dx^n} = (-1)^n x^{lx-n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(2lx)^{2k}}{1.2\ldots k} \times$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m 1.2\ldots m k_{m-k} (2lx)^{-m} \overset{n-1}{C}(n-m)$$

Sechzehntes Capitel.

Functionen der Kreisbogen.

Um die höhern Differentialquotienten der Functionen von Kreisbogen zu entwickeln, kann man die letztern in imaginärer Form an die Stelle der Logarithmen setzen, und die diesen entsprechenden Formeln auf sie anwenden. Es ist bekanntlich

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

und wenn man eins durch's andere dividirt,

$$e^{2iz} = \frac{\cos z + i \sin z}{\cos z - i \sin z}$$
$$= \frac{1 + i\, tg\, z}{1 - i\, tg\, z}$$

Es sei nun $z = arc\, tg\, x$, und $x = iu$, so ist:

$$i\, tg\, z = ix = -u$$
$$e^{2iz} = \frac{1-u}{1+u}$$

Nun ist nach Gleichung (43)

$$\frac{d^n \varphi(-2iz)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi^k(-2iz)$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h h^{n-k} e^{2hiz} \frac{d^n . e^{-2hiz}}{dx^n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p h^{-p} \overset{n}{C}(p)$$

Setzt man $\varphi(-2iz) = f(z)$, so ist nach Gleichung (12)

$$\varphi^k(-2iz) = f^k(z)\,(-2i)^{-k}$$

oder da $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$ ist,

$$\varphi^k(-2iz) = f^k(z)\, 2^{-k}\, e^{\frac{ki\pi}{2}}$$

Ferner ist

$$e^{\pm 2hiz} = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\mp h}$$

Führt man diese Werthe ein, und setzt *arc tg x* für z, so erhält man:

$$\frac{d^n f(arc\, tg\, x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(arc\, tg\, x)\, 2^{-k}\, e^{\frac{ki\pi}{2}} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h h^{n-k} \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{-h} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^h \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^h h^{-p} \overset{n}{C}(p)$$

Nun ist

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^h = (-1)^h \left(1 - \frac{2}{1-u}\right)^h$$

$$= (-1)^h \sum_{q=0}^{q=h} (-1)^q h_q\, 2^q\, (1-u)^{-q}$$

folglich, da $x = iu = e^{\frac{i\pi}{2}} u$ ist,

$$\frac{d^n.}{dx^n}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^h = e^{-\frac{ni\pi}{2}} \frac{d^n.}{du^n}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^h$$

$$= (-1)^h e^{-\frac{ni\pi}{2}}\, 1.2\ldots n \times$$

$$\sum_{q=1}^{q=h} (-1)^q h_q\, (q+n-1)_n\, 2^q\, (1-u)^{-n-q}$$

Führt man diesen Werth ein, und setzt wieder $-ix$ für u, so erhält man:

$$\frac{d^n f\,(arc\,tg\,x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k\,(arc\,tg\,x)\,2^{-k}\,e^{\frac{-n+k}{2}i\pi} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} n_h\,h^{n-k}\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^{-h} \times$$

$$\sum_{q=1}^{q=h} (-1)^q\,h_q\,(q+n-1)_n\,2^q\,(1+ix)^{-n-q}$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\,h^{-p}\,\overset{n}{C}(p)$$

Um aus diesem Ansdrucke die imaginären Elemente zu entfernen, muss man die Nenner reell machen, und die Zähler entwickeln. Für diesen Zweck hat man

$$\frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+x^2}$$

folglich

$$\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^{-h}(1+ix)^{-n-q} = \frac{(1-ix)^{-h}\,(1+ix)^{h-q}}{(1+ix)^n}$$

$$= \frac{(1-ix)^{n-h}\,(1+ix)^{h-q}}{(1+x^2)^n}$$

Jetzt sind alle Exponenten positiv; daher erhält man nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1-ix)^{n-h} = (1+e^{-\frac{i\pi}{2}}x)^{n-h}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=n-h} (n-h)_m\,e^{-\frac{mi\pi}{2}}\,x^m$$

$$(1+ix)^{h-q} = \sum_{r=0}^{r=h-q} (h-q)_r \, e^{\frac{ri\pi}{2}} \, x^r$$

Führt man diese Werthe ein, und bringt alle imaginären Grössen zusammen, so erhält man:

$$\frac{d^n f(arc\,tg\,x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n} \sum_{k=1}^{k=n} 2^{-k} f^k(arc\,tg\,x) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} n_h \, h^{n-k} \sum_{q=1}^{q=h} (-1)^q \, h_q \, (q+n-1)_n \, 2^q \times$$

$$\sum_{m=0}^{m=n-h} (n-h)_m \sum_{r=0}^{r=h-q} (h-q)_r \, e^{(-n+k+r-m)\frac{i\pi}{2}} \, x^{m+r} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p \, h^{-p} \, \overset{n}{C}(p)$$

Setzt man $n-k-r-m$ für r, so wird die Summe nach r, mit Weglassung der Summe nach p,

$$= \sum_{r=n-k-m-h+q}^{r=n-k-m} (h-q)_{r-m-n-k} \, e^{-(r+2m)\frac{i\pi}{2}} \, x^{n-k-r}$$

Die Grösse $e^{-(r+2m)\frac{i\pi}{2}}$ ist, für jedes gerade r, $= \pm 1$, für jedes ungerade r, $= \pm i$. Demzufolge ist der ganze reelle Theil des Ausdrucks in den Gliedern enthalten, für welche r gerade ist. Da also, wenn die linke Seite reell sein soll, der imaginäre Theil, d. h. derjenige, welcher den gemeinschaftlichen Factor i und ausserdem nur reelle Elemente hat, für sich verschwinden muss, so

ist die Summe aller Glieder, für welche r ungerade ist, $= 0$. Nach §. 4. der Einleitung kann man in diesem Falle $2r$ für r setzen; dann wird die Summe nach r

$$= (-1)^m \sum_{r=\frac{n-k-m-h+q}{2}}^{r=\frac{n-k-m}{2}} (-1)^r \, (h-q)_{n-k-m-2r} \, x^{n-k-2r}$$

Vertauscht man die Summenzeichen der r und m, so werden die Grenzen der r

$$\frac{q-k}{2} \gtrless r \gtrless \frac{n-k}{2}$$

die der m hingegen können unverändert bleiben, weil die Bedingungen

$$n-k-h+q-2r \gtrless m \gtrless n-k-2r$$

durch das Verschwinden der Grösse

$$(h-q)_{n-k-m-2r}$$

erfüllt werden. Vertauscht man ferner die Summenzeichen der r und q, so werden die Grenzen der r

$$\frac{1-k}{2} \gtrless r \gtrless \frac{n-k}{2}$$

und die der q

$$1 \gtrless q \gtrless 2r+k$$

weil die Bedingung $q \gtrless h$ von selbst erfüllt wird, indem $2r+k \gtrless h$ ist. Vertauscht man endlich die Summenzeichen der r und h, so bleiben die Grenzen unverändert. Stellt man also das Summenzeichen der r zwischen die der h und k, so hat man nur die so eben bestimmten Grenzen beizufügen, und erhält:

$$\frac{d^n f(arc\,tg\,x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n x^n}{(1+x^2)^n} \sum_{k=1}^{k=n} (2x)^{-k} f^k(arc\,tg\,x) \times$$

$$\sum_{r=\frac{1-k}{2}}^{r=\frac{n-k}{2}} (-1)^r\, x^{-2r} \sum_{h=1}^{h=n} n_h\, h^{n-k} \times$$

$$\sum_{q=1}^{q=2r+k} (-1)^q\, h_q\, (n+q-1)_n\, 2^q \times$$

$$\sum_{m=0}^{m=n-h} (-1)^m\, (n-h)_m\, (h-q)_{n-k-m-2r} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p\, h^{-p}\, \overset{n}{C}(p)$$

Um auch die höhern Diffq. von $f(arc\ tg\ x)$ nach x zu entwickeln, hat man diese Function erst in Gleichung (5) einzuführen, wodurch

$$\frac{d^n f(arc\ tg\ x)}{dx^n} \text{ auf } \frac{d^k f(arc\ tg\ z)}{dz^k}$$

zurückgeführt wird, dessen Werth man aus der so eben entwickelten Gleichung findet. In der Form $arc\ tg\ x$ sind aber die Arcus aller trigonometrischen Functionen enthalten, insofern man die Tangente als Function einer jeden der übrigen betrachten kann, so dass man hat:

$$\pm\, arc\ cos\ x = 2\mu\pi + arc\ tg\ \sqrt{x^{-2}-1}$$
$$= \left(2\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + arc\ tg\ (x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$arc\ sin\ x = \mu\pi + (-1)^\mu\, arc\ tg\ (x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + (-1)^\mu\, arc\ tg\ \sqrt{x^{-2}-1}$$

$$\pm \, arc \sec x = 2\mu\pi + arc\, tg \sqrt{x^2 - 1}$$
$$= \left(2\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + arc\, tg\, (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$arc\, cosec\, x = \mu\pi + (-1)^\mu\, arc\, tg\, (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + (-1)^\mu\, arc\, tg \sqrt{x^2 - 1}$$

Hiermit ist vollständig erwiesen, dass man die höhern Differentialquotienten aller Functionen, die auf beliebige Art aus den genannten einfachen zusammengesetzt sind, independent ausdrücken kann, und die aufgestellten Sätze reichen hin, um diese Operation in jedem Falle auszuführen. Die betrachteten Functionen begreifen alle expliciten algebraischen und sogenannten transcendenten der ersten Classe in sich. Wie weit dieselbe Theorie auch auf andere Functionen anwendbar ist. wollen wir im nächsten Capitel sehen.

Siebzehntes Capitel.

Von den Integralen.

Eine Function, die sich nicht in entwickelter Form auf bestimmte bekannte Functionen zurückführen lässt, wie wir sie bis jetzt betrachtet haben, kann, wenn wir von unendlichen Reihen, Kettenbrüchen u. s. w. absehen, namentlich noch auf zweierlei Art gegeben sein: in Form von Integralen oder durch Gleichungen. Ist eine Function z von x durch eine Gleichung wie

$$y = f(x, z) = 0$$

gegeben, so findet man die Differentialquotienten von z successive bekanntlich auf folgende Weise:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{dy}{dz}\right) dz = 0 \quad , \quad \text{daher}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\left(\frac{dy}{dx}\right) : \left(\frac{dy}{dz}\right)$$

Differenziirt man diese Gleichung mehrmals, und setzt jedesmal für $\frac{dz}{dx}$, so oft es auf der rechten Seite erscheint, seinen Werth, so erhält man, wenn der Kürze wegen $\left(\frac{dy}{dz}\right) = z_1$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{z_1}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{2}{z_1^2}\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{z_1^3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^3z}{dx^2} = -\frac{1}{z^2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{3}{z_1^2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3y}{dx^2dz}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$-\frac{3}{z_1^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dx\,dz^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$+\frac{1}{z_1^4}\left[7\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right) + \left(\frac{d^3y}{dz^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$-\frac{3}{z_1^5}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Um demnach $\frac{d^nz}{dx^n}$ independent auszudrücken, müsste man das Gesetz kennen, wonach diese Reihen fortschreiten; ein solches würde sich indessen nur mittelst neuer Principien auffinden lassen. Noch schwieriger würde die Untersuchung, wenn die Function durch mehrere Gleichungen zwischen mehr als zwei Veränderlichen gegeben wäre.

Was die durch Integrale ausgedrückten Functionen betrifft, so muss man unterscheiden, ob ein blosses Integral oder eine Function eines Integrals gegeben ist. Im erstern Falle kann man bekanntlich leicht die Differenziation des Integrals auf die der zu integrirenden Function zurückführen. Die allgemeine Form eines Integrals als Function von x ist

$$\int_y^z f(x,\xi)\,d\xi$$

Von seinen 3 veränderlichen Elementen $f(x,\xi)$, y und z kann man indessen eins constant machen, indem man entweder $\xi + y$ für ξ setzt, so dass

$$\int_y^z f(x,\xi)\,d\xi = \int_0^{z-y} f(x,\xi+y)\,d\xi$$

wird, oder das Integral in zwei zerlegt,

$$\int_y^z f(x,\xi)\,d\xi = \int_a^z f(x,\xi) - \int_a^y f(x,\xi)\,d\xi$$

so dass auch

$$\int_a^z f(x,\xi)\,d\xi$$

für die allgemeine Form gelten kann. Hier hat man wieder drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $f(x,\xi)$ oder z oder keins von beiden von x unabhängig ist. Im ersten Falle hat man bekanntlich

$$\frac{d}{dx}\int_a^z f(\xi)\,d\xi = f(z)\,\frac{dz}{dx}$$

daher

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^z f(\xi)\,d\xi = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f(z)\,\frac{dz}{dx}\right]$$

Im zweiten Falle hat man:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,\xi)\,d\xi = \int_a^b \frac{df(x,\xi)}{dx}\,d\xi$$

und erhält durch Fortsetzung der Differenziation:

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^b f(x,\xi)\,d\xi = \int_a^b \frac{d^n f(x,\xi)}{dx^n}\,d\xi$$

Im dritten Falle hat man:

$$\frac{d}{dx}\int_a^z f(x,\xi)\,d\xi = \int_a^z \frac{df(x,\xi)}{dx}\,d\xi + f(x,z)\,\frac{dz}{dx}$$

daher

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^z f(x,\xi)\,d\xi = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\int_a^z \frac{df(x,\xi)}{dx}\,d\xi + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f(x,z)\frac{dz}{dx}\right]$$

Setzt man $n-k$ für n und

$$\frac{d^k f(x,\xi)}{dx^k} \quad \text{für} \quad f(x,\xi)$$

und bezeichnet diese Grösse der Kürze wegen durch $f^k(x,\xi)$, wo sich also die Differenziation nur auf das erste Element x und nicht auf ξ bezieht, so wird die Gleichung

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\int_a^{x} f^k(x,\xi)\,d\xi = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\int_a^{x} f^{k+1}(x,\xi)\,d\xi$$
$$+\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left[f^k(x,x)\,\frac{dx}{dx}\right]$$

Summirt man nach k zwischen den Grenzen 0 und $n-1$, so kommt:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\int_a^{x} f^k(x,\xi)\,d\xi =$$
$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\int_a^{x} f^{k+1}(x,\xi)\,d\xi$$
$$+\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left[f^k(x,x)\,\frac{dx}{dx}\right]$$

Setzt man auf der rechten Seite der Gleichung $k-1$ für k, trennt von deren erstem Theile das letzte Glied, von der linken Seite das erste ab, so heben sich die übrig bleibenden Summen, und man erhält:

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^{x} f(x,\xi)\,d\xi = \int_a^{x} f^n(x,\xi)\,d\xi$$
$$+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[f^{k-1}(x,x)\,\frac{dx}{dx}\right]$$

wo zu beachten ist, dass $f^{k-1}(x,x)$ der partielle Differentialquotient nach x ist, während sich das vorstehende Differentialzeichen auch auf x als Veränderliche bezieht.

In allen drei Fällen gelangt man, im Fall $f(x, \xi)$ selbst ein Integral ist, durch Wiederholung des Verfahrens zum Ziele. Ist ein Integral mit einem veränderlichen Factor multiplicirt, so kann man denselben hinter das Integralzeichen rücken; z. B.:

$$\varphi(x) \int_a^x f(x, \xi)\, d\xi = \int_a^x \varphi(x)\, f(x, \xi)\, d\xi$$

Ein Product mehrerer Integrale kann man als ein mehrfaches Integral betrachten; z. B.:

$$\int_b^y \varphi(x, \xi)\, d\xi \int_a^x f(x, \xi)\, d\xi = \int_b^y d\vartheta \int_a^x \varphi(x, \vartheta) f(x, \xi)\, d\xi$$

ausserdem kann man die höhern Differentialquotienten eines solchen Products mittelst der Gleichung (1) auf die der Factoren zurückführen.

Was nun die Functionen von Integralen betrifft, so ist klar, dass sich die bisher aufgestellten Formeln nicht zur Reduction ihrer höhern Diffq. auf die der zu integrirenden Function benutzen lassen, weil man ein Integral nicht als Function der zu integrirenden Grösse betrachten, und so in einfache Functionen zerlegen kann. Nur so viel lässt sich auch auf sie anwenden, dass, wenn die in Cap. III. eingeführten Grössen $\overset{n}{u}_k$ einmal für ein bestimmtes Integral $= z$ gefunden sind, man auch die höhern Diffq. aller Functionen desselben Integrals kennt. Die Auffindung einer eigenen Reductionsmethode für Integrale scheint dagegen Schwierigkeiten zu unterliegen.

Achtzehntes Capitel.

Fernere Benutzung der allgemeinen Entwickelung im elften Capitel.

Die Bestimmung der Grössen $\overset{n}{u}_k$ mittelst der Gleichung (21) ist im elften Capitel allgemeiner ausgeführt worden, als für den nächsten Zweck erforderlich war; sie ist daher noch anderer Anwendungen fähig, die zwar nicht wie die erste zur vollständigen Entwickelung der gesuchten Grössen dienen, aber wenigstens bemerkenswerthe Relationen zwischen denselben liefern. Zu den Functionen, welche den daselbst ausgesprochenen Bedingungen von $\varphi_h(x)$ genügen, unter denen jene Entwickelung anwendbar ist, gehören namentlich noch

$$\varphi_h(x) = (a_h + x)^\alpha \quad \text{und} \quad \varphi_h(x) = l(a_h + x)$$

denn im ersten Falle hat man:

$$\varphi_h^k(x) = 1.2\ldots k\,(\alpha)_k\,(a_h + x)^{\alpha - k}$$

so dass

$$Q_h = (a_h + x)^\alpha \quad ; \quad R_k = 1.2\ldots k\,(\alpha)_k$$

$$c_h = \frac{1}{a_h + x}$$

zu setzen ist; im zweiten Falle:

$$\varphi_h^k(x) = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots(k-1)\,(a_h + x)^{-k}$$

daher

$$Q_h = 1 \quad ; \quad R_k = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots(k-1)$$

$$c_h = \frac{1}{a_h + x}$$

In beiden Fällen ist c_h dieselbe Grösse, daher können wir sie leicht beide in einer Form begreifen. Nach den Gleichungen (27) sqq. hat man:

$$t_h = \frac{1}{c_h} = a_h + x$$

$$w_h = \frac{(a_h + x)^n}{Q_h} \frac{d^n \varphi_h(x)}{dx^n}$$

$$\overset{n}{u}_k = \frac{v_{n-k+1}}{R_k}$$

$$= \frac{1}{R_k} \sum_{h=1}^{h=n} \overset{n-k+1}{M_h} \frac{(a_h + x)^n}{Q_h} \frac{d^n \varphi_h(x)}{dx^n}$$

$$\overset{k}{M_h} = D_h (a_h + x)^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p (a_h + x)^{-p} \overset{n}{C}(a_p + x)$$

$$\overset{n-k+1}{M_h} = D_h (a_h + x)^{k-1} \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p (a_h + x)^{-p} \overset{n}{C}(a_p + x)$$

$$D_h = \frac{1}{(a_h - a_1) \ldots (a_h - a_{h-1}) (a_h - a_{h-1}) \ldots (a_h - a_n)}$$

und erhält nach gehöriger Substitution:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k} f^k(x) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h + x)^{n+k-1} \dfrac{d^n}{dx^n} \varphi_h(x)}{Q_h (a_h - a_1) \ldots (a_h - a_{h-1}) (a_h - a_{h+1}) \ldots (a_h - a_n)} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p (a_h + x)^{-p} \overset{n}{C}(a_p + x)$$

Um $\overset{n}{C}(a_p + x)$ zu bestimmen, kann man es auf folgende Weise entwickeln. Nach Gleichung (27) ist

$$\overset{n}{C}(a_p+x) = \frac{(-1)^p}{1.2\ldots(n-p)} \frac{d^{n-p}.}{dx^{n-p}} (\xi - a_1 - x)(\xi - a_2 - x)\ldots$$
$$\ldots.. (\xi - a_n - x) \quad \text{für} \quad \xi = 0$$

Entwickelt man das Product nach Potenzen von $(\xi - x)$, so kommt:

$$\overset{n}{C}(a_p+x) = \frac{(-1)^p}{1.2\ldots(n-p)} \times$$
$$\sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \overset{n}{C}(a_q) \frac{d^{n-p}.(\xi - x)^{n-q}}{d\xi^{n-p}} \quad (\xi = 0)$$
$$= \sum_{q=0}^{q=p} (n-q)_{n-p} \, x^{p-q} \overset{n}{C}(a_q)$$

Indessen kenn man noch einfacher zum Ziele kommen, wenn man $a_h - \gamma$ für a_h substituirt, und nach der Differenziation $\gamma = x$ setzt. Setzt man $a_h - \gamma$ für a_h, so geht $\varphi_h(x)$ seiner Bedeutung gemäss über in $\varphi_h(x - \gamma)$, und die Gleichung wird:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k} f^k(x) \times$$
$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(a_h)^{n+k-1} \frac{d^n}{dx^n} \varphi_h(x-\gamma)}{Q_h(a_h - 1)\ldots(a_h - a_{h-1})(a_h - a_{h+1})\ldots(a_h - a_n)} \times$$
$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p (a_h)^{-p} \overset{n}{C}(a_p) \qquad (\gamma = x)$$

Setzt man jetzt $a_h = a^h$, so erhält man:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k} f^k(x) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{h+1} \frac{a^{h_{\bar{2}}+h(k-2)}}{Q_h \varDelta(h-1)\varDelta(n-h)} \frac{d^n \varphi_h(x-\gamma)}{dx^n} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p a^{-hp} \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2+r(n+1)}}{\varDelta(r)\varDelta(p-r)} \quad (\gamma = x)$$

Setzt man statt dessen $a_h = h$, so kommt:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k} f^k(x) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h h^{n-k} \frac{1}{Q_h} \frac{d^n \varphi_h(x-\gamma)}{dx^n} \times$$

$$\sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p h^{-p} \overset{n}{C}(p) \qquad (\gamma = x)$$

In beiden Formeln kann man die Grössen Q_h, R_k, $\varphi_h(x-\gamma)$ auf doppelte Weise bestimmen. In der ersten ist entweder

$$Q_h = a^{h\alpha} \quad ; \quad R_k = 1.2\ldots k\,(\alpha)_k$$
$$\varphi_h(x-\gamma) = (a_h - \gamma + z)^\alpha$$

oder

$$Q_h = 1 \quad ; \quad R_k = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots(k-1)$$
$$\varphi_h(x-\gamma) = l(a_h - \gamma + x)$$

In der letzteren entweder

$$Q_h = h^\alpha \quad ; \quad R_k = 1.2\ldots k\,(\alpha)_k$$
$$\varphi_h(x-\gamma) = (h-\gamma+x)$$

oder

$$Q_h = 1 \quad ; \quad R_k = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots(k-1)$$
$$\varphi_h(x-\gamma) = l(h-\gamma+x)$$

Hier kann α jede beliebige Grösse sein, nur keine positive ganze Zahl $< n$, weil sonst R_k, welches im Nenner steht, $= 0$ sein würde.

Setzt man $\cos(a_h + z)$ an die Stelle von $\varphi_h(z)$, so erhält man, was auch a_h sein mag, nur 2 von einander unabhängige Gleichungen, welche zwei durch ihre Einfachheit bemerkenswerthe Relationen zwischen den $\overset{n}{u}_k$ liefern, wenn sie gleich nicht zu deren Bestimmung hinreichen. Wir wollen daher nur 2 Werthe von a_h nehmen, nämlich $a_1 = -\gamma$ und $a_2 = -\gamma - \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$\varphi_1(z) = \cos(z - \gamma)$$
$$\varphi_2(z) = \sin(z - \gamma)$$

Führt man diese Werthe in Gleichung (21) ein, so kommt

$$\frac{d^n \cos(z-\gamma)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(z - \gamma + \frac{k\pi}{2}\right) \overset{n}{u}_k$$

$$\frac{d^n \sin(z-\gamma)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(z - \gamma + \frac{k\pi}{2}\right) \overset{n}{u}_k$$

Setzt man nach der Differenziation $\gamma = z$, so kommt:

$$\frac{d^n \cos(z-\gamma)}{dx^n}(\gamma = z) = \sum_{k=1}^{k=n} \cos\frac{k\pi}{2} \cdot \overset{n}{u}_k$$

$$\frac{d^n \sin(z-\gamma)}{dx^n}(\gamma = z) = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\frac{k\pi}{2} \cdot \overset{n}{u}_k$$

Da nun in der ersten Gleichung das allgemeine Glied der rechten Seite für ein ungerades k, in der zweiten für ein gerades k verschwindet, so kann man nach §. 4. der Einleitung in der ersten Gleichung $2k$, in der zweiten $2k+1$ für k setzen, und erhält alsdann, da $\cos k\pi = (-1)^k$ und $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$ ist,

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}} (-1)^k \overset{n}{u}_{2k} = \frac{d^n \cos(z-y)}{dx^n} \qquad (y=z)$$

$$\sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \overset{n}{u}_{2k+1} = \frac{d^n \sin(z-y)}{dx^n} \qquad (y=z)$$

Neunzehntes Capitel.

Entwickelung in imaginärer Form.

Am einfachsten lassen sich $\overset{n}{C}(a_p)$ und $\overset{n}{u}_k$ ausdrücken, wenn man für a_h die $n$te Wurzel der Einheit setzt. Es sei also

$$a = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{2}$$

$$a_h = a^h$$

Da die Grössen $a, a^2, a^3, \ldots a^n$ sämmtlich Wurzeln der Gleichung

$$\xi^n - 1 = 0$$

sind, so ist

$$(\xi - a)(\xi - a^2) \ldots (\xi - a^n) = \xi^n - 1$$

Ausserdem hat man:

$$(\xi - a)(\xi - a^2) \ldots (\xi - a^n) = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \xi^{n-p} \overset{n}{C}(a^p)$$

Vergleicht man die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von ξ in beiden Ausdrücken derselben Grösse, so erhält man:

$$\overset{n}{C}(a^0) = 1$$

$$\overset{n}{C}(a^p) = 0 \qquad (0 < p < n)$$

$$\overset{n}{C}(a^n) = (-1)^{n+1}.$$

Nun hat man nach Gleichung (30)

$$\overset{k}{M}_h = D_h \, a^{h(n-k)} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p \, a^{-hp} \, \overset{n}{C}(a^p)$$

Ist nun, wie es allein vorkommt, $k > 0$, so ist $p < n$, folglich verschwinden alle Glieder der Summe bis auf das erste, und es bleibt:

$$\overset{k}{M}_h = D_h \, a^{h(n-k)}$$

Um D_h zu bestimmen, hat man nach Gleichung (22):

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{k}{M}_h \, a^{h(k-1)} = 1$$

Setzt man für $\overset{k}{M}_h$ seinen Werth, so kommt:

$$1 = \sum_{k=1}^{k=n} D_h \, a^{h(n-1)} = n \, D_h \, a^{h(n-1)}$$

$$D_h = \frac{1}{n} \, a^{-h(n-1)}$$

folglich:

$$\overset{k}{M}_h = \frac{1}{n} \, a^{-h(k-1)}$$

Nun ist nach Gleichung (29):

$$\overset{n}{u}_k = \sum_{h=1}^{h=n} \overset{k}{M}_h \, a^{-h} \, e^{-a^h z} \, \frac{d^n . e^{a^h z}}{dx^n}$$

Setzt man für $\overset{k}{M}_h$ seinen Werth, und substituirt den Ausdruck in die Gleichung

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \overset{n}{u}_k \tag{52}$$

so findet man:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(z) \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} e^{-a^h z} \frac{d^n . e^{a^h z}}{dx^n}$$

Setzt man jetzt lz für z, so erhält man:

$$\frac{d^n f(lz)}{dx^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lz) \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} z^{-a^h} \frac{d^n . z^{a^h}}{dx^n}$$

Um aus dieser Gleichung einen Ausdruck für $C(k)$ abzuleiten, setze man x für z, so kommt:

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lx) \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} x^{-a^h} \frac{d^n . x^{a^h}}{dx^n}$$

$$= \frac{1 . 2 \ldots (n-1)}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} f^k(lx) \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} (a^h)_n$$

Ausserdem hat man:

$$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k f^k(lx) \overset{n-1}{C}(n-k)$$

Die Vergleichung der Coefficienten beider Ausdrücke giebt:

$$\overset{n-1}{C}(n-k) = (-1)^{n+k} 1 . 2 \ldots (n-1) \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} (a^h)_n$$

Setzt man $n-k$ für k, und alsdann $n+1$ für n, so erhält man:

$$\overset{n}{C}(k) = (-1)^k \, 1 \, . \, 2 \ldots n \sum_{h=1}^{h=n} a^{-h(n-k+1)} \, (a^h)_{n+1}$$

wo a die $(n+1)$ste Wurzel der Einheit ist, daher man hat:

$$a^{-h(n+1)} = 1$$

folglich:

$$\overset{n}{C}(k) = (-1)^k \, 1 \, . \, 2 \ldots n \sum_{h=1}^{h=n} a^{hk} \, (a^h)_{n+1}$$

einen Ausdruck, der schon zu Ende des XIII. Capitels auf andere Weise hergeleitet worden ist.

Will man aus dem obigen Ausdrucke die imaginären Elemente entfernen, so kann diess am einfachsten auf folgende Weise geschehen. Denken wir uns, dass y nach der Differenziation in x übergeht, so ist:

$$\overset{n}{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} \, e^{-a^h y} \, \frac{d^n \, . \, e^{a^h x}}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{n} \, \frac{d^n}{dx^n} \sum_{h=1}^{h=n} a^{-hk} \, e^{a^h (x-y)}$$

Nun ist:

$$a^h = cos \frac{2h\pi}{n} + i \, sin \frac{2h\pi}{n}$$

$$a^{-hk} = cos \frac{2hk\pi}{n} - i \, sin \frac{2hk\pi}{2}$$

$$e^{a^h(x-y)} = e^{(x-y) \, cos \frac{2h\pi}{n} + i \, (x-y) \, sin \frac{2h\pi}{n}}$$

$$= e^{(x-y) \, cos \frac{2h\pi}{n}} \left[cos \left((x-y) \, sin \frac{2h\pi}{n} \right) \right.$$

$$\left. + \, i \, sin \left((x-y) \, sin \frac{2h\pi}{n} \right) \right]$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen, so kommt:

$$a^{-hk}\, e^{a^h(x-y)} = e^{(x-y)\cos\frac{2h\pi}{n}} \times$$
$$\left[\cos\left((x-y)\sin\frac{2h\pi}{n} - \frac{2hk\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left. + i \sin\left((x-y)\sin\frac{2h\pi}{n} - \frac{2hk\pi}{n}\right)\right]$$

Führt man diesen Werth ein, so kommt:

$$\overset{n}{u}_k = \frac{1}{n}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{h=1}^{h=n} e^{(x-y)\cos\frac{2h\pi}{n}} \times$$
$$\left[\cos\left((x-y)\sin\frac{2h\pi}{n} - \frac{2hk\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left. + i \sin\left((x-y)\sin\frac{2h\pi}{n} - \frac{2hk\pi}{n}\right)\right].$$

Da nun für ein reelles x auch $\overset{n}{u}_k$ reell ist, wie man leicht aus frühern Formeln abnehmen kann, so muss der mit i multiplicirte Theil der Summe verschwinden; was auch schon daraus folgt, dass der entsprechende Theil des allgemeinen Gliedes dieselben Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen annimmt, wenn h in $n-h$ übergeht. Führt man darauf den Ausdruck in Gleichung (52) ein, so erhält man:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d^n}{dx^n}.\, e^{(x-y)\cos\frac{2h\pi}{n}} \times$$
$$\cos\left[(x-y)\sin\frac{2h\pi}{n} - \frac{2hk\pi}{n}\right]$$

wo der getroffenen Bestimmung gemäss nach der Differenziation y in x übergeht.

Zwanzigstes Capitel.

Zusammenstellung aller durch andere Methoden gewonnenen, hierher gehörigen Formeln und Sätze.

Obgleich unsere Aufgabe in der bezeichneten Ausdehnung nun vollständig gelöst ist, so können doch, selbst abgesehen von einer möglichen Erweiterung der Theorie, die Untersuchungen über die independente Bestimmung der höhern Differentialquotienten nicht für abgeschlossen gelten; denn es ist klar, dass neben den gefundenen Ausdrücken für dieselben Grössen noch viele andere existiren können, die sich sowohl in der Form der Entwickelung, als auch in der Darstellung der numerischen Coefficienten dermassen unterscheiden, dass sie sich nicht durch leichte Umformung *aus* den erstern ableiten lassen. Demnach wird eine Behandlung aller bisher bekannten einzelnen Formeln und Sätze, die zur independenten Bestimmung der höhern Diffq. dienen, eine keineswegs überflüssige, wenngleich noch unvollständige, Ergänzung der allgemeinen Theorie sein; durch deren Vorhandensein jene eher an Bedeutsamkeit gewinnen als verlieren können.

Die erste Veranlassung zur Aufsuchung independenter Ausdrücke für höhere Diffq. gab ohne Zweifel der Taylor'sche Lehrsatz, demzufolge sie zur Coefficientenbestimmung in Reihenentwickelungen von Functionen dienten. Da indessen zu diesem Zwecke die Beibehaltung der Veränderlichen in den höhern Diffq. nicht unbedingt erfordert wird, so dass z. B. zur Entwickelung von $f(x)$ nicht nothwendig $f^n(x)$, sondern nur etwa $f^n(0)$, $f^n(1)$, etc. bekannt zu sein braucht — so wandte sich die Untersuchung immer mehr auf solche specielle Werthe, und es waren anfangs nur die Functionen x^a, e^x, $\cos x$, $\sin x$, lx, deren höhere Diffq. man in ihrer allgemeinen Form darstellte. Die erste etwas complicirtere Formel ist von Euler gefunden, nämlich für $\operatorname{arc} \sin x$; sie findet sich in seinem Werke *Instit. calc. diff. p. I. pag.* 171 ohne Beweis, und lautet nach unserer Bezeichnung:

$$\frac{d^n \, arc \sin x}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)\, x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k \, (n-1)_{2k} \, (2x)^{-2k}$$

Um sie zu beweisen, differenziire man sie noch einmal, so kommt:

$$\frac{d^{n+1} \, arc \sin x}{dx^{n+1}} = \frac{1.2\ldots(n-1)\, x^{n-2}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k \, (n-1)_{2k} \, \frac{n-2k-1}{(2x)^{2k}}$$

$$+ \frac{1.2\ldots(n-1)\, x^{n}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k \, (n-1)_{2k} \, \frac{2n-1}{(2x)^{2k}}$$

Multiplicirt man im ersten Theile der rechten Seite Zähler und Nenner mit $1-x^2$, und zerlegt die Summe nach den beiden Gliedern des Factors $1-x^2$ in zwei Theile, so kommt:

$$\frac{d^{n+1} \, arc \sin x}{dx^{n+1}} = \frac{1.2\ldots(n-1)\, x^{n-2}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k \, (n-1)_{2k} \, \frac{n-2k-1}{(2x)^{2k}}$$

$$- \frac{1.2\ldots(n-1)\, x^{n}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k \, (n-1)_{2k} \, \frac{n-2k-1}{(2x)^{2k}}$$

$$+ \frac{1.2\ldots(n-1)\,x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k\,(n-1)_{2k}\,\frac{2n-1}{(2x)^{2k}}$$

Die zwei letzten Theile der rechten Seite lassen sich leicht addiren; im ersten setze man $k-1$ für k, so kommt:

$$\frac{d^{n+1}\,arc\,sin\,x}{dx^{n+1}} = \frac{1.2\ldots(n-1)\,x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\Bigg[\sum_{k=1}^{k=\frac{n+1}{2}} 4\,(2k-2)_{k-1}\,(n-1)_{2k-2}\,\frac{n-2k+1}{(2x)^{2k}}$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (2k)_k\,(n-1)_{2k}\,\frac{n+2k}{(2x)^{2k}}\Bigg]$$

Nun hat man:

$$(2k-2)_{k-1}\,(n-1)_{2k-2}\,(n-2k+1) =$$

$$(2k)_k\,n_{2k}\,\frac{k^2}{2k\,(2k-1)} \cdot \frac{2k\,(2k-1)}{n\,(n-2k+1)}\,(n-2k+1)$$

$$= (2k)_k\,n_{2k}\,\frac{k^2}{n}$$

ferner

$$(n-1)_{2k}\,(n+2k) = n_{2k}\,\frac{n-2k}{n}\,(n+2k)$$

$$= n_{2k}\left(n - \frac{4k^2}{n}\right)$$

Führt man diese Werthe ein, so kommt:

$$\frac{d^{n+1}\,arc\,sin\,x}{dx^{n+1}} = \frac{1.2\ldots(n-1)\,x^n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left[\sum_{k=1}^{k=\frac{n+1}{2}} \frac{(2k)_k\, n_{2k}}{(2x)^{2k}} \cdot \frac{4k^2}{n}\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} \frac{(2k)_k\, n_{2k}}{(2x)^{2k}} \left(n - \frac{4k^2}{n}\right)\right]$$

Beachtet man nun, dass das allgemeine Glied des ersten Theiles für $k = 0$, das des zweiten Theiles, wenn n gerade ist, für $k = \frac{n}{2}$, wegen des Factors $\left(n - \frac{4k^2}{n}\right)$, und beide, wenn n ungerade ist, für $k = \frac{n+1}{2}$, wegen des Factors n_{2k}, verschwinden, so sieht man, dass man beide Summen, ohne ihre Werthe zu verändern, zwischen den Grenzen $k = 0$ und $k = \frac{n}{2}$ nehmen kann. Addirt man sie, so vereinigen sich $\frac{4k^2}{n}$ und $n - \frac{4k^2}{n}$ zu n, und man erhält:

$$\frac{d^{n+1} \operatorname{arc} \sin x}{dx^{n+1}} = \frac{1.2\ldots n\, x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (2k)_k\, n_{2k}\, (2x)^{-2k}$$

Da dieser Ausdruck mit dem zu beweisenden übereinstimmt, wenn man daselbst $n+1$ für n setzt, so folgt, dass derselbe für ein wachsendes n richtig bleibt, wenn er für einen Werth von n richtig war. Nun ist er für $n = 1$ richtig, denn da giebt er:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

folglich ist er für jedes $n \geqq 1$ richtig.

Für dieselbe Grösse haben wir im sechsten Capitel einen andern Ausdruck gefunden; jener schreitet nach Potenzen von $\frac{x^2}{1-x^2}$ fort, dieser nach Potenzen von x^{-2}.

Später hat Pfaff in ähnlicher Form die höhern Diffq. von $arc\,tg\,x$ dargestellt. Die Formel findet sich in der Abhandlung: „Localformeln für höhere Differenziale“, herausgeg. von Hindenburg in seiner Sammlung combinatorischer Abhandlungen. Wir können sie leicht aus Gleichung (11) ableiten, nach welcher

$$\frac{d^n\,arc\,tg\,x}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\,sin\,n\left(\frac{\pi}{2}+arc\,tg\,x\right)$$

Es ist bekannt, dass man den Sinus des Vielfachen eines Bogens nach Potenzen der Tangente desselben Bogens auf folgende Weise entwickeln kann:

$$sin\,n\varphi = cos^n\varphi \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k\, n_{2k+1}\, tg^{2k+1}\varphi$$

Setzt man $\varphi = \frac{\pi}{2} + arc\,tg\,x$, so wird $tg\,\varphi = -\frac{1}{x}$, und, wenn man $arc\,tg\,x$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ nimmt,

$$cos\,\varphi = -sin\,arc\,tg\,x = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

das giebt:

$$sin\,n\left(\frac{\pi}{2}+arc\,tg\,x\right) =$$

$$\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k\, n_{2k+1}\, x^{-2k-1}$$

Führt man diesen Werth ein, so erhält man:

$$\frac{d^n\,arc\,tg\,x}{dx^n} = (-1)^{n+1}\,1.2\ldots(n-1)\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \, n_{2k+1} \, x^{-2k-1}$$

Der Ausdruck (11), den wir bisher überall zu Grunde gelegt, und aus dem wir den von Pfaff hergeleitet haben, ist indessen erst in neuerer Zeit von Grunert gefunden worden. Ein dritter findet sich im sechsten Capitel.

Obgleich sich die Mehrzahl der unsern Gegenstand betreffenden Untersuchungen auf specielle Functionen bezogen, so finden sich doch auch einige allgemeinere Theoreme vor. Das erste dieser Art war eine Frucht der combinatorischen Analysis. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts setzte man nämlich grosse Hoffnung auf eine uneingeschränkte Einführung der unendlichen Reihen in die Rechnung, und suchte zu diesem Zwecke nicht bloss alle Functionen in Reihen zu entwickeln, sondern auch Regeln aufzustellen, um alle algebraischen Operationen an diesen Reihen zu vollziehen, wo es sich darum handelte, die Coefficienten der Entwickelung des Resultats zu bestimmen. Diese Aufgabe gab der combinatorischen Analysis vielen Stoff; sie wurde namentlich von Pfaff, Hindenburg und einigen Andern bearbeitet, die, da sich jene Coefficienten oft in keine bequeme Form fassen liessen, die Coefficienten der Entwickelung der Potenzen von Polynomen zu Grunde legten, und andere Grössen darauf zurückführten. In der obenangeführten Schrift hat Pfaff dieselben zum Ausdruck der höhern Diflq. benutzt, und eine Reductionsformel für dieselben aufgestellt. Wir können sein Theorem leicht aus einem frühern Satze ableiten, ohne tiefer in seine Rechnungsweise einzudringen, und die Erklärung seiner Bezeichnungen vorauszuschicken, was uns zu weit führen würde.

Ist Δz das Increment von z, welches dem Increment Δx von x entspricht, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$(z+\Delta z-\gamma)^k = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n.(z-\gamma)^k}{dx^n}$$

Lässt man nach der Differenziation γ in z übergehen, so kommt:

$$\Delta z^k = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Delta x^n}{1\,.\,2\ldots n} \frac{d^n.(z-\gamma)^k}{dx^n} \quad (\gamma = z)$$

Ferner ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1\,.\,2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \text{etc.}\ldots$$

$$\Delta z^k = \left(\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1\,.\,2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \text{etc.}\ldots\right)$$

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von Δx, und bezeichnet den Coefficienten der $n$ten Potenz durch N_n, so erhält man:

$$\Delta z^k = \sum_{n=0}^{n=\infty} N_n\,\Delta x^n$$

Eine Vergleichung der Coefficienten giebt:

$$\frac{d^n.(z-\gamma)^k}{dx^n} = 1\,.\,2\ldots n\,N_n \qquad (\gamma = z)$$

Schreibt man nun die Gleichung (6), wie folgt:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1\,.\,2\ldots k} f^k(z) \frac{d^n.(z-\gamma)^k}{dx^n} \quad (\gamma = z)$$

und setzt für den letzten Factor seinen Werth, so erhält man:

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1\,.\,2\ldots n}{1\,.\,2\ldots k} N_n\, f^k(z)$$

Diese Gleichung mit Berücksichtigung der Bedeutung von N_n drückt, wiewohl sie nicht mit denselben Zeichen geschrieben ist, das Theorem von Pfaff aus. Ihre Bedeutung ist der unserer Reductionsformeln ähnlich, jedoch nimmt die Anwendung, welche er davon macht, eine etwas verschiedene Richtung. Er setzt zwar für die

Function f specielle Functionen, und leitet Formeln für lx, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{arc} tg\, x$, $tg\, x$ her; dagegen lässt er x unbestimmt, und betrachtet N_n, welches unserm $\overset{n}{u_k}$ entspricht, als eine durch Relationen bekannte Grösse; demnach können jene Formeln an sich nicht independent genannt werden. Wollte man aber N_n entwickeln, so würde man einen Complex von Combinationen zwischen den höhern Diffq. von x mit prägnantem Bildungsgesetz erhalten; und da dieser Umstand durch Specialisirung von z nicht gehoben wird, so lassen sich aus der in Rede stehenden Formel keine für unsern Zweck brauchbaren Resultate ziehen. Indessen ist sie auch hier insofern bemerkenswerth, als sie implicite das Theorem von Cap. III. in sich enthält, und man ferner daraus sieht, dass sich die Grössen $\overset{n}{u_k}$ durch Coefficienten der Entwickelung von Δz^k nach Potenzen von Δx darstellen lässt, ein Umstand, der auf einen Zusammenhang mit der Differenzenrechnung deutet.

Einundzwanzigstes Capitel.

Fortsetzung. Entwickelung einer eigenthümlichen Form höherer Differentialquotienten.

Ein zweites Theorem, das zwar nicht speciell für denselben Zweck aufgestellt, doch mehr als das erstere geeignet ist, hierher gehörige Resultate zu liefern, findet sich in der Dissertation: „*De evolvenda functione*

$$\frac{yd\,.\,yd\,.\,yd\,\ldots\,ydX}{dx^n}$$

disquisitiones nonnullae analyticae“ von Scherk. Der Gegenstand dieser Abhandlung ist die Aufgabe, einen Ausdruck von der bezeichneten Form, wo y und X beliebige Functionen von x sind, allgemein nach höhern Differentialquotienten von X zu ent-

wickeln. Da jedoch die Entwickelung mittelst combinatorischer Symbole ausgeführt worden ist, deren Gebrauch nach den in der Einleitung ausgesprochenen Grundsätzen hier vermieden werden muss: so sind wir genöthigt, die ganze Herleitung fahren zu lassen, und nur die Aufgabe, wie sie gestellt ist, beizubehalten, diese übrigens auf anderem Wege zu lösen.

Es sei demnach

$$\frac{z\,dy}{dx} \quad \text{durch} \quad \frac{(zd)^1\,y}{dx^1}$$

$$\frac{zd\,.\,z\,dy}{dx^2} \quad \text{durch} \quad \frac{(zd)^2\,y}{dx^2}$$

$$\frac{zd\,.\,zd\,.\,z\,dy}{dx^3} \quad \text{durch} \quad \frac{(zd)^3\,y}{dx^3}$$

u. s. w. bezeichnet, woraus man die Bedeutung des Ausdrucks:

$$\frac{(zd)^n\,y}{dx^n}$$

leicht abnehmen wird. Ferner sei

$$s = \int \frac{dx}{z}$$

daher:

$$z = \frac{dx}{ds}$$

Differenziirt man y mehrmals nach x, und multiplicirt jedesmal mit z, so erhält man nach einander:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dx} = \frac{dy}{ds}\,\frac{1}{z}$$

$$\frac{z\,dy}{dx} = \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2\,.\,z\,dy}{dx^2} = \frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{ds}{dx} = \frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{1}{z}$$

$$\frac{(zd)^2\,y}{dx^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$\frac{d\,.\,(zd)^2\,y}{dx^3} = \frac{d^3y}{ds^3}\,\frac{ds}{dx} = \frac{d^3y}{ds^3}\,\frac{1}{z}$$

$$\frac{(zd)^3\,y}{dx^3} = \frac{d^3y}{ds^3}$$

daher allgemein:

$$\frac{(zd)^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{ds^n}$$

Hierdurch ist die Aufgabe auf die zurückgeführt, die höhern Diffq von y in Bezug auf s durch die in Bezug auf x auszudrücken. Diese haben wir bereits auf mehr als eine Weise gelöst, so dass man nur s für x, x für z, y für $f(z)$ zu setzen braucht, um die verlangte Entwickelung auf der Stelle hinschreiben zu können. Wir können indessen noch mehr erreichen. Vertauscht man x und s, so ergiebt sich die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich die höhern Diffq. von y in Bezug auf x nach Grössen von der oben bezeichneten Form zu entwickeln. Führt man beide Substitutionen in Gleichung (5) aus, so erhält man:

$$\frac{(zd)^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k x^k}{1.2\ldots k} \frac{d^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h x^{-h} \frac{d^n . x^h}{ds^n}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k s^k}{1.2\ldots k} \frac{(zd)^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h s^{-h} \frac{d^n . s^h}{dx^n}$$

Durch die nämlichen Substitutionen erhält man aus Gleichung (6):

$$\frac{(zd)^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{1.2\ldots k} \frac{d^k y}{dx^k} \frac{d^n . \left(\frac{x}{\gamma} - 1\right)^k}{ds^n} \qquad (\gamma = x)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{s^k}{1.2\ldots k} \frac{(zd)^k y}{dx^k} \frac{d^n . \left(\frac{s}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n} \qquad (\gamma = s)$$

Obgleich diese Ausdrücke mit den allgemeinen Resultaten in der genannten Abhandlung wenig gemein haben, so gehen doch die nämlichen speciellen Formeln daraus hervor. Wir wollen daher dieselben Beispiele wählen, wie dort. Ist $z = x$, so wird:

$$s = \int \frac{dx}{x} = lx$$

wo die Constante der Integration, da sie willkührlich ist, auch fehlen kann. Folglich ist

$$x = e^s$$

$$\frac{d^n . x^h}{ds^n} = \frac{d^n . e^{hs}}{ds^n} = h^n e^{hs} = h^n x^h$$

Substituirt man diese Werthe in die erste und letzte unserer vier Formeln, so erhält man:

$$\frac{(x d)^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k x^k}{1.2\ldots k} \frac{d^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(lx)^k}{1.2\ldots k} \frac{(x d)^k y}{dx^k} \frac{d^n . \left(\frac{lx}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n}$$

$$(\gamma = lx)$$

Es sei jetzt $z = e^{-x}$, so wird

$$s = \int e^x dx = e^x$$

$$x = ls$$

$$\frac{d^n . s^h}{dx^n} = \frac{d^n . e^{hx}}{dx^n} = h^n e^{hx}$$

$$s^{-h} = e^{-hx}$$

Substituirt man diese Werthe in die dritte und zweite Formel, so erhält man:

$$\frac{(e^{-x} d)^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{1.2\ldots k} \frac{d^k y}{dx^k} \frac{d^n . \left(\frac{ls}{\gamma} - 1\right)^k}{ds^n} \quad (\gamma = ls)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k e^{kx}}{1.2\ldots k} \frac{(e^{-x} d)^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

Setzt man in Gleichung (46) (Cap. XV.) n für q, k für h, und lässt nach der Differenziation x in 1 übergehen, so kommt:

$$\frac{d^n.(lx)^k}{dx^n} = (-1)^{n+k}\, 1\,.\,2 \ldots k\; C(n-k) \qquad (x = 1)$$

Setzt man hier $x e^{-\gamma}$ für x, so erhält man mit Berücksichtigung von Gleichung (12) [Cap. V.]:

$$\frac{d^n.[l(x e^{-\gamma})]^k}{dx^n} = (-1)^{n+k}\, 1\,.\,2 \ldots k\; e^{-n\gamma}\, \overset{n-1}{C}(n-k)$$

wo nach der Differenziation $x e^{-\gamma} = 1$ oder $\gamma = lx$ zu setzen ist. Nun ist

$$\frac{lx}{\gamma} - 1 = \frac{1}{\gamma}\, l(x e^{-\gamma})$$

folglich

$$\frac{d^n.\left(\frac{lx}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n} = \gamma^{-k}\, \frac{d^n.[l(x e^{-\gamma})]^k}{dx^n}$$

folglich, wenn γ in lx übergeht,

$$\frac{d^n.\left(\frac{lx}{\gamma} - 1\right)^k}{dx^n} = \frac{(-1)^{n+k}\, 1\,.\,2 \ldots k}{x^n\,(lx)^k}\, \overset{n-1}{C}(n-k)$$

Ebenso hat man, für $\gamma = ls$,

$$\frac{d^n.\left(\frac{ls}{\gamma} - 1\right)^k}{ds^n} = \frac{(-1)^{n+k}\, 1\,.\,2 \ldots k}{s^n\,(ls)^k}\, \overset{n-1}{C}(n-k)$$

$$= \frac{(-1)^{n+k}\, 1\,.\,2 \ldots k}{x^k\, e^{nx}}\, \overset{n-1}{C}(n-k)$$

Substituirt man diese Werthe am gehörigen Orte, so erhält man:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k\, \overset{n-1}{C}(n-k)\, \frac{(xd)^k y}{dx^k}$$

$$\frac{(e^{-x} d)^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{e^{nx}} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k\, \overset{n-1}{C}(n-k)\, \frac{d^k y}{dx^k}$$

Setzt man noch in den beiden Gleichungen, in denen e^{-x} vorkommt, $-x$ für x, so erhält man die vier Gleichungen:

$$\frac{(x\,d)^n\,y}{d\,x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k\,x^k}{1\,.\,2\ldots k}\,\frac{d^k y}{d\,x^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h\,k_h\,h^n$$

$$\frac{d^n\,y}{d\,x^n} = \frac{(-1)^n}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k\,\overset{n-1}{C}(n-k)\,\frac{(x\,d)^k\,y}{d\,x^k} \qquad (53)$$

$$\frac{(e^x\,d)^n\,y}{d\,x^n} = e^{nx} \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n-1}{C}(n-k)\,\frac{d^k y}{d\,x^k}$$

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{-kx}}{1\,.\,2\ldots k}\,\frac{(e^x\,d)^k\,y}{d\,x^k} \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h\,k_h\,h^n$$

Zu diesen zwei Beispielen wollen wir noch ein drittes hinzufügen. Es sei $z = x^{1-\alpha}$, wo $\alpha \lesseqgtr 0$ ist; hier ist

$$s = \int x^{\alpha-1}\,d\,x = \frac{1}{\alpha}\,x^\alpha$$

$$x = \sqrt[\alpha]{\alpha}\,.\,s^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{d^n\,.\,x^h}{d\,s^n} = \alpha^{\frac{h}{\alpha}}\,\frac{d^n\,.\,s^{\frac{h}{\alpha}}}{d\,s^n}$$

$$= 1\,.\,2\ldots n\left(\frac{h}{\alpha}\right)_n \alpha^{\frac{h}{\alpha}}\,s^{\frac{h}{\alpha}-n}$$

$$= 1\,.\,2\ldots n\left(\frac{h}{\alpha}\right)_n \alpha^n\,x^{h-n\alpha}$$

$$\frac{d^n\,.\,s^h}{d\,x^n} = \alpha^{-h}\,\frac{d^n\,.\,x^{h\alpha}}{d\,x^n}$$

$$= 1\,.\,2\ldots n\,(h\,\alpha)_n\,\alpha^{-h}\,x^{h\alpha-n}$$

$$s^{-h} = \alpha^h\,x^{-h\alpha}$$

Führt man diese Werthe in die ersten zwei Formeln ein, so erhält man:

$$\frac{(x^{1-\alpha}\, d)^n\, y}{d\,x^n} = 1\,.\,2\ldots n\, \frac{\alpha^n}{x^{n\alpha}} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k\, x^k}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{d^k y}{d\,x^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h\, k_h \left(\frac{h}{\alpha}\right)_n$$

$$\frac{d^n\, y}{d\,x^n} = (-1)^n\, 1\,.\,2\ldots n\, x^{-n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k\, \alpha^{-k}\, x^{k\alpha}}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{(x^{1-\alpha} d)^k y}{d\,x^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h\, k_h\, (h\,\alpha)_n$$

Für die drei Fälle $\alpha = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}$ lassen sich auf die ersten Summen die Summationsformeln (50) (51) [Cap. XV.) anwenden, wodurch man erhält:

$$\frac{(x^2\, d)^n\, y}{d\,x^n} = 1\,.\,2\ldots n\, x^n \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1}\, \frac{x^k}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{d^k\, y}{d\,x^k}$$

$$\frac{d^n\, y}{d x^n} = (-1)^n\, 1\,.\,2\ldots n\, x^{-n} \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1}\, \frac{(-1)^k\, x^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{(x^2\, d)^k\, y}{d\,x^k}$$

$$\frac{(\sqrt{x}\, d)^n y}{d\,x^n} = \frac{1\,.\,2\ldots n}{(4\sqrt{x})^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k}\, \frac{(4x)^{-k}}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{d^k\, y}{d\,x^k}$$

$$\frac{d^n\, y}{d\,x^n} = \frac{1\,.\,2\ldots n}{(2x)^n} \sum_{k=1}^{k=n} k_{n-k}\, \frac{2^k\, x^{2k}}{1\,.\,2\ldots k}\, \frac{\left(\frac{1}{x}\, d\right)^k y}{d\,x^k}$$

Man kann diese Formeln öfters zur independenten Bestimmung der höhern Diffq. der Function y anwenden, indem man zuerst die Grösse

$$\frac{(zd)^n y}{dx^n}$$

sucht, wobei man die willkührliche Function z möglichst vortheilhaft wählen kann. Ist z. B. $y = llx$ gegeben, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,lx}$$

$$\frac{x\,dy}{dx} = \frac{1}{lx}$$

$$\frac{d\,.\,x\,dy}{dx^2} = \frac{1}{x(lx)^2}$$

$$\frac{(xd)^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{(lx)^2}$$

Fährt man so fort, so behält die rechte Seite stets ihre einfache Gestalt, so dass sich der allgemeine Ausdruck

$$\frac{(xd)^k y}{dx^k} = (-1)^{k+1}\,1\,.\,2\ldots(k-1)\,(lx)^{-k}$$

leicht finden lässt. Führt man diesen Werth in Gleichung (53) ein, so erhält man:

$$\frac{d^n llx}{dx^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n} 1\,.\,2\ldots(k-1)\,(lx)^{-k}\,\overset{n-1}{C}(n-k)$$

Aus unserer Ausdrucksform ist klar, dass die Lösung der zu Anfang des Capitels gestellten Aufgabe jederzeit möglich ist, wenn $\frac{1}{z}$ nach x integrabel ist, und sich x durch dieses Integral *explicite* ausdrücken lässt. Im entgegengesetzten Falle kann die Aufgabe dazu dienen, an die Stelle der zwei ungelösten Aufgaben von Cap. XVII. zu treten, welche sich, obwohl unter Einschränkungen, auf jene zurückführen lassen. Angenommen nämlich, die Grössen L_k in der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{L}_k(z)\,\frac{(z\,d)^k y}{dx^k}$$

seien allgemein bestimmt. so braucht man erstens nur $y = f\left(\int \frac{dx}{z}\right)$ zu setzen, um die höhern Diffq. einer jeden Function eines jeden unbestimmten Integrals durch die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{L}_k(z)\, f^k\left(\int \frac{dx}{z}\right)$$

ausgedrückt zu finden. Ist zweitens die Function z durch eine Gleichung $f(x, z) = 0$ von der Art bestimmt, dass man den Werth von x daraus entwickeln kann, so dass $x = \varphi(z)$ hervorgeht: so hat man:

$$\frac{dx}{dz} = \varphi'(z)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi'(z)}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dz}\,\frac{1}{\varphi'(z)}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{\varphi'(z)\, d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dz}\,\frac{1}{\varphi'(z)}$$

$$\frac{d\,.\,\varphi'(z)\, d^2 z}{dx^3} = \frac{d^2}{dz^2}\,\frac{1}{\varphi'(z)}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{(\varphi'(z)\, d)^2\, dz}{dx^3} = \frac{d^2}{dz^2}\,\frac{1}{\varphi'(z)}$$

etc. und allgemein:

$$\frac{(\varphi'(z)\, d)^n\, dz}{dx^{n-1}} = \frac{d^n}{dz^n}\,\frac{1}{\varphi'(z)}$$

Folglich hat man:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\, dz}{dx^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n-1} \overset{n-1}{L_k} (\varphi'(z)) \frac{(\varphi'(z)\, d)^k\, dz}{dx^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n-1} \overset{n-1}{L_k} (\varphi'(z)) \frac{1}{\varphi'(z)}$$

In der obengenannten Abhandlung ist jedoch die vorausgesetzte Entwickelung nur für die zwei Fälle $z = x$ und $z = e^x$ ausgeführt.

Zweiundzwanzigstes Capitel.

Eine besondere Formel für die negativen ganzen Potenzen von Functionen.

Es ist bisher von keiner der Formeln die Rede gewesen, welche für die Functionen *sec x*, *tg x* und die diesen entsprechenden Exponentialfunctionen zu verschiedenen Zeiten aufgestellt worden sind, und zwar in der Absicht, alle hierher gehörigen Formeln später in einem besondern Abschnitte zu behandeln, vorher aber noch einen allgemeinern Satz herzuleiten, welcher zu den vorhandenen Formeln einige neue für dieselben Functionen hinzuliefern wird. Es sei

$$U = (1 - u)^p$$

$$V = \sum_{h=0}^{h=q} (p + h - 1)_{p-1}\, u^h$$

Wir wollen das Product UV nach Potenzen von u entwickeln; diess giebt:

$$UV = \sum_{h=0}^{h=q} (p+h-1)_{p-1} u^h (1-u)^p$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (p+h-1)_{p-1} \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k p_k u^{k+h}$$

und wenn man $k-h$ für k setzt,

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (p+h-1)_{p-1} \sum_{k=h}^{k=p+h} (-1)^{k+h} p_{k-h} u^k$$

und wenn man die Summenzeichen vertauscht:

$$= \sum_{k=0}^{k=p+q} (-1)^k u^k \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_{p-1} p_{k-h}$$

wo die Bedingungen $h \gtreqless k$, $h \geqq k-p$ nicht hinzugefügt zu werden brauchen, weil p_{k-h} sowohl für $h > k$, als auch für $h < k-p$ verschwindet. Um den Werth der ersten Summe zu finden, setze man sie $= A_k$, und ziehe auf beiden Seiten dieselbe nebenstehende Grösse ab, dann ist, für $k > 0$,

$$A_k - \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_p p_{k-h+1} \frac{k-h+1}{k}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_{p-1} p_{k-h}$$

$$- \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_p p_{k-h+1} \frac{k-h+1}{k}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_{p-1}\, p_{k-h} \left(1 - \frac{h}{p}\,\frac{p-k+h}{k}\right)$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_{p-1}\, p_{k-h}\, \frac{(p+h)\,(k-h)}{p\,k}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h)_p\, p_{k-h}\, \frac{k-h}{k}$$

Setzt man auf der linken Seite $h+1$ für h, und beachtet, dass das erste Glied der Summe $= 0$ ist, so erhält man:

$$A_k + \sum_{h=0}^{h=q-1} (-1)^h (p+h)_p\, p_{k-h}\, \frac{k-h}{k}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h)_p\, p_{k-h}\, \frac{k-h}{k}$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig bis auf das letzte Glied der rechten Seite, und es bleibt:

$$A_k = (-1)^q\, (p+q)_p\, p_{k-q}\, \frac{k-q}{k}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $k \gtrless q$, und für $k = 0$ erhält man:

$$A_0 = \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h (p+h-1)_{p-1}\, p_{-h} = 1$$

denn alle Glieder verschwinden bis auf das erste. Nun war

$$UV = \sum_{k=0}^{k=p+q} (-1)^k A_k\, u^k$$

Setzt man für A_k seine Werthe, und entfernt die verschwindenden Glieder, so erhält man:

$$UV = 1 + (p+q)_p \sum_{k=q+1}^{k=p+q} (-1)^{k+q} p_{k-q} \frac{k-q}{k} u^k$$

und wenn man $k+q$ für k setzt,

$$UV = 1 + (p+q)_p \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k p_k \frac{k}{k+q} u^{k+q}$$

Setzt man jetzt $u = \frac{z}{y}$, dividirt die Gleichung durch z^m, und differenziiirt sie $n$mal nach x, so kommt:

$$\frac{d^n.}{dx^n} z^{-m} \left(1 - \frac{z}{y}\right)^p V = \frac{d^n.z^{-m}}{dx^m}$$

$$+ (p+q)_p \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k p_k \frac{k}{k+q} y^{-k-q} \frac{d^n.z^{k+q-m}}{dx^n}$$

Führt man die Differenziation der linken Seite successive aus, so wird, wenn $n < p$ ist, die Grösse $\left(1 - \frac{z}{y}\right)$ ein Factor des Resultates sein, weil sich der Exponent derselben bei jeder Differenziation nur um 1 vermindert. Der andere Factor ist offenbar eine ganze Function der Grössen

$$\frac{1}{z}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^nz}{dx^n}$$

und kann daher nur für gewisse Werthe von x eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Folglich verschwindet der Ausdruck für $1 - \frac{z}{y} = 0$ oder $y = z$. Setzt man also nach der Differenziation $y = z$, so ist

$$0 = \frac{d^n.z^{-m}}{dx^n}$$

$$+ (p+q)_p \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k p_k \frac{k}{k+q} z^{-k-q} \frac{d^n . z^{k+q-m}}{dx^n}$$

für $p > n$. Setzt man jetzt

$$p = n + 1 + \nu$$
$$q = m - 1 + \mu$$

so wird

$$(p+q)_p = (p+q)_q$$
$$= (m+n+\mu+\nu)_{m+\mu-1}$$
$$= \frac{m+\mu}{n+\nu+1} (m+n+\mu+\nu)_{m+\mu}$$
$$p_k = (n+\nu+1)_k$$
$$= \frac{n+\nu+1}{k} (n+\nu)_{k-1}$$

Führt man diese Werthe ein, und setzt $k+1$ für k, so erhält man:

$$\frac{d^n . z^{-m}}{dx^n} = (m+\mu)(m+n+\mu+\nu)_{m+\mu} \times$$
$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k (n+\nu)_k \frac{z^{-k-m-\mu}}{k+m+\mu} \frac{d^n . z^{k+\mu}}{dx^n}$$

wo μ und ν zwei willkührliche positive ganze Zahlen sind. Diese Formel wird identisch mit Gleichung (20), wenn man dort $a = -m$, und hier $\mu = \nu = 0$ setzt.

Dreiundzwanzigstes Capitel.

Anwendung der letzten Formel.

Es sei in der so eben erhaltenen Gleichung erstens $z = \cos x$, so ist

$$\frac{d^n . z^{k+\mu}}{d x^n} = \frac{d^n . \cos^{k+\mu} x}{d x^n} =$$

$$\frac{1}{2^{k+\mu}} \sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h \, (2h - k - \mu)^n \cos\left[(2h - k - \mu)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

folglich nach der Substitution:

$$\frac{d^n . \sec^m x}{dx^n} = (m+\mu)\,(m+n+\mu+\nu)_{m+\mu} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k \, (n+\nu)_k \, \frac{2^{-k-\mu}}{k+m+\mu} \sec^{k+m+\mu} x \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h \, (2h - k - \mu)^n \cos\left[(2h - k - \mu)\, x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Es sei ferner $z = e^{\alpha x} + c e^{\beta x}$, so ist:

$$\frac{d^n . z^{k+\mu}}{dx^n} = e^{(k+\mu)\alpha x} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h \, c^h \, [(k+\mu)\,\alpha + h\,(\beta - \alpha)]^n \, e^{h(\beta-\alpha)x}$$

und wenn man diess einführt,

$$\frac{d^n . (e^{\alpha x} + c e^{\beta x})^{-m}}{dx^n} = (m+\mu)(m+n+\mu+\nu)_{m+\mu}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)_k (n+\nu)_k \frac{e^{(k+\mu)\alpha x}}{k+m+\mu} (e^{\alpha x} + c e^{\beta x})^{-k-m-\mu}$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h c^h [(k+\mu)\alpha + h(\beta-\alpha)]^n e^{h(\beta-\alpha)x}$$

Ferner sei $z = x^\alpha + c x^\beta$, so ist:

$$\frac{d^n . z^{k+\mu}}{dx^n} = 1.2\ldots n\, x^{(k+\mu)\alpha-n} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h c^h [(k+\mu)\alpha + h(\beta-\alpha)]_n x^{h(\beta-\alpha)}$$

und wenn man diess substituirt,

$$\frac{d^n . (x^\alpha + c x^\beta)^{-m}}{dx^n} = (m+\mu)(m+n+\mu+\nu)_{m+\mu} \frac{1.2\ldots n}{x^n} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k (n+\nu)_k \frac{x^{(k+\mu)\alpha}}{k+m+\mu} (x^\alpha + c x^\beta)^{-k-m-\mu} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h c^h [(k+\mu)\alpha + h(\beta-\alpha)]_n x^{h(\beta-\alpha)}$$

Aus diesen drei Formeln lassen sich andere ableiten. Man hat nämlich:

$$\frac{d\,tg\,x}{dx} = sec^2 x$$

$$\frac{d^2\, l\, cos\, x}{dx^2} = -\, sec^2\, x$$

$$\frac{d\, l\, tg\, x}{dx} = 2\, cosec\, 2\, x$$

$$\frac{d}{dx}\, \frac{e^{\alpha x} + a}{e^{\alpha x} + c} = (c - a)\, \alpha\, (e^{\frac{\alpha x}{2}} + c\, e^{-\frac{\alpha x}{2}})^{-2}$$

$$\frac{d\, l\, (a + e^{\alpha x})}{dx} = \frac{\alpha}{1 + a\, e^{-\alpha x}}$$

woraus folgt, dass

$$\frac{d^n\, tg\, x}{dx^n} = \frac{d^{n-1} .\, sec^2\, x}{dx^{n-1}} \tag{54}$$

$$\frac{d^n\, l\, cos\, x}{dx^n} = -\, \frac{d^{n-2} .\, sec^2\, x}{dx^{n-2}}$$

$$\frac{d^n\, l\, tg\, x}{dx^n} = 2\, \frac{d^{n-1}\, cosec\, 2x}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\, \frac{e^{\alpha x} + a}{e^{\alpha x} + c} = (c - a)\, \alpha\, \frac{d^{n-1} .\, (e^{\frac{\alpha x}{2}} + c\, e^{-\frac{\alpha x}{2}})^{-2}}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^n\, l\, (a + e^{\alpha x})}{dx^n} = \alpha\, \frac{d^{n-1} .\, (1 + a\, e^{-\alpha x})^{-1}}{dx^{n-1}}$$

Durch Substitution von $x - \frac{\pi}{2}$ erhält man ferner Formeln für $cosec^m\, x$, $\cot x$, $l\, sin\, x$. Um die höhern Diffq. der Potenzen der Tangente zu finden, kann man entweder $tg^m\, x$ in $sin^m\, x\, sec^m\, x$ zerlegen, und die Leibnitzische Formel anwenden; oder die Potenzen der Tangente nach Potenzen der Secante entwickeln. Im letztern Falle ist jedoch zu unterscheiden, ob der Exponent gerade oder ungerade ist. Ist er gerade, so hat man:

$$tg^{2m}\, x = (-1)^m\, (1 - sec^2\, x)^m$$

$$= (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p\, m_p\, sec^{2p}\, x$$

und, da das erste Glied bei der Differenziation verschwindet,

$$\frac{d^n . tg^{2m} x}{d^n x} = (-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^p m_p \frac{d^n . sec^{2p} x}{d x^n}$$

Setzt man für die letzte Grösse ihren Werth, so kommt:

$$\frac{d^n . tg^{2m} x}{d x^n} =$$

$$(-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^p m_p (2p+\mu) (2p+n+\mu+\nu)_{n+\nu} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k (n+\nu)_k \frac{2^{-k-\mu}}{k+2p+\mu} sec^{k+2p+\mu} x \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h (2h-k-\mu)^n \cos\left[(2h-k-\mu)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

oder, wenn man das dritte Summenzeichen mit den beiden übrigen vertauscht,

$$\frac{d^n . tg^{2m} x}{d x^n} = (-1)^m \sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k (n+\nu)_k \left(\frac{sec\, x}{2}\right)^{k+\mu} \times$$

$$\sum_{h=0}^{k=k+\mu} (k+\mu)_h (2h-k-\mu)^n \cos\left[(2h-k-\mu)x+\frac{n\pi}{2}\right] \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=m} (-1)^p m_p \frac{2p+\mu}{k+2p+\mu} (2p+n+\mu+\nu)_{n+\nu}\, sec^{2p} x$$

Der Gewinn bei der letzten Umformung besteht darin, dass die zweite Summe in zwei Factoren zerfällt, indem die erste von h unabhängig ist.

Ist der Exponent von $tg\,x$ ungerade, so hat man:

$$tg^{2m+1}x = (-1)^m\, tg\,x\,(1 - sec^2 x)^m$$

$$= (-1)^m\, tg\,x + (-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^p m_p\, tg\,x\, sec^{2p}x$$

Nun ist

$$\frac{d\,.\,sec^{2p}x}{dx} = 2p\, tg\,x\, sec^{2p}x$$

folglich

$$\frac{d^n\,.\,tg^{2m+1}x}{dx^n} = (-1)^m \frac{d^n\, tg\,x}{dx^n}$$

$$+ (-1)^m \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^p}{2p}\, m_p\, \frac{d^{n+1}\,.\,sec^{2p}x}{dx^{n+1}}$$

Setzt man für den letzten Factor seinen Werth, und vertauscht die Summenzeichen wie vorher, so kommt:

$$\frac{d^n\,.\,tg^{2m+1}x}{dx^n} = (-1)^m \frac{d^n\, tg\,x}{dx^n}$$

$$+ (-1)^m \sum_{k=0}^{k=n+\nu+1} (-1)^k (n+\nu+1)_k \left(\frac{sec\,x}{2}\right)^{k+\mu} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h (2h-k-\mu)^{n+1} cos\left[(2h-k-\mu)\,x + \frac{n+1}{2}\pi\right] \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^p}{2p}\, m_p\, \frac{2p+\mu}{k+2p+\mu}\, (2p+n+\mu+\nu+1)_{2p+\mu}\, sec^{2p}x$$

wo der erste Theil der rechten Seite nach Gleichung (54) zu bestimmen ist.

Vierundzwanzigstes Capitel.

Zusammenstellung aller bekannten Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten der Secante, Tangente und der diesen entsprechenden Exponentialfunctionen.

Obgleich von den zwei genannten Kreisfunctionen die Secante offenbar die einfachere ist, und sich die höhern Diffq. der Tangente leicht aus denen der Potenzen der Secante ergeben, so hat man doch gewöhnlich den umgekehrten Weg eingeschlagen, und die Formeln für die Secante auf die der Tangente durch die Gleichung

$$sec\, x = \frac{1}{2}\, tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\, tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

zurückgeführt. Der Erste, welcher mit der Entwickelung der Formel für die Secante angefangen hat, ist, so viel ich weiss, Gudermann, welcher in seiner Theorie der Potenzial- und cyklisch-hyperbolischen Functionen (Crelle, Journ. der Mathem. Bd. VI. H. IV. pag. 311) für beide Functionen Formeln giebt. Da er zur Bestimmung der Coefficienten Localausdrücke (oder Coefficienten der Entwickelung von Potenzen eines Polynoms, von denen wir im XX. Capitel gesprochen haben) gebraucht, so sind wir genöthigt, die independenten Ausdrücke für deren Werthe selbst zu suchen. Die Herleitung der Formel für die Secante lässt sich indessen ohne wesentliche Aenderung ihres Ganges auf jede beliebige Potenz der Secante anwenden; daher wollen wir zuerst die allgemeinere Function $sec^{\alpha} x$ behandeln. Durch successive Differenziation erhält man:

$$\frac{d\, sec^{\alpha} x}{d\, x} = a\, sec^{\alpha+1} x\, sin\, x$$

$$\frac{d^2\, sec^{\alpha} x}{d x^2} = -\, a^2\, sec^{\alpha} x + a\,(a+1)\, sec^{\alpha+2} x$$

$$\frac{d^3 \sec^\alpha x}{dx^3} = -\alpha^3 \sec^{\alpha+1} x \sin x$$
$$+ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \sec^{\alpha+3} x \sin x$$
$$\frac{d^4 \sec^\alpha x}{dx^4} = \alpha^4 \sec^\alpha x$$
$$+ \alpha(\alpha+1)(2\alpha^2 + 4\alpha + 4)\sec^{\alpha+2} x$$
$$- \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \sec^{\alpha+4} x$$

Lässt man die constanten Coefficienten für's Erste unbestimmt, so erhält man den allgemeinen Ausdruck:

$$\frac{d^{2n} \sec^\alpha x}{dx^{2n}} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n+k} \overset{n}{A}_k \sec^{\alpha+2k} x \qquad (55)$$

Um den Werth von $\overset{n}{A}_k$ zu finden, differenziirc man die Gleichung noch zweimal, so kommt:

$$\frac{d^{2n+1} \sec^\alpha x}{dx^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+n} (\alpha + 2k) \overset{n}{A}_k \sec^{\alpha+2k+1} x \sin x$$

$$\frac{d^{2n+2} \sec^\alpha x}{dx^{2n+2}} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+n} (\alpha + 2k) \overset{n}{A}_k \times$$
$$[\sec^{\alpha+2k} x + (\alpha + 2k + 1) \sec^{\alpha+2k+2} x \sin^2 x]$$

und da die Parenthese

$$= -(\alpha + 2k) \sec^{\alpha+2k} x + (\alpha + 2k + 1) \sec^{\alpha+2k+2} x$$

ist,

$$\frac{d^{2n+2} \sec^\alpha x}{dx^{2n+2}} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+n+1} (\alpha + 2k)^2 \overset{n}{A}_k \sec^{\alpha+2k} x$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+n} (\alpha + 2k)(\alpha + 2k + 1)^2 \overset{n}{A}_k \sec^{\alpha+2k+2} x$$

Entwickelt man die linke Seite nach der vorausgesetzten Formel (55), und setzt zugleich im zweiten Theile der rechten $k-1$ für k, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} (-1)^{k+n+1} \overset{n+1}{A}_k \sec^{\alpha+2k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+n+1} (\alpha+2k)^2 \overset{n}{A}_k \sec^{\alpha+2k} x$$

$$+\sum_{k=1}^{k=n+1} (-1)^{k+n+1} (\alpha+2k-1)(\alpha+2k-2) \overset{n}{A}_{k-1} \sec^{\alpha+2k} x$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von $\sec x$ ergiebt sich:

$$\overset{n+1}{A}_k = (\alpha+2k)^2 \overset{n}{A}_k + (\alpha+2k-1)(\alpha+2k-2) \overset{n}{A}_{k-1}$$

$$\overset{n+1}{A}_0 = a^2 \overset{n}{A}_0$$

$$\overset{n+1}{A}_{n+1} = (\alpha+2n)(\alpha+2n+1) \overset{n}{A}_n$$

Setzt man in der ersten von diesen drei recurrirenden Gleichungen $r-1$ für n, multiplicirt mit $(\alpha+2k)^{2n-2r}$, und summirt dann nach r zwischen $k+1$ und n, so erhält man:

$$\sum_{r=k+1}^{r=n} (\alpha+2k)^{2n-2r} \overset{r}{A}_k =$$

$$\sum_{r=k+1}^{r=n} (\alpha+2k)^{2n-2r+2} \overset{r-1}{A}_k$$

$$+ (\alpha+2k-1)(\alpha+2k-2) \sum_{r=k+1}^{r=n} (\alpha+2k)^{2n-2r} \overset{r-1}{A}_{k-1}$$

Aus der dritten recurrirenden Gleichung erhält man, indem man $k-1$ für n setzt,

$$(\alpha + 2k)^{2n-2k} \overset{k}{A}_k = (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2)(\alpha + 2k)^{2n-2k} \overset{k-1}{A}_{k-1}$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden, so lassen sich beide Seiten derselben als erste Glieder in die Summen aufnehmea, und man erhält:

$$\sum_{r=k}^{r=n} (\alpha + 2k)^{2n-2r} \overset{r}{A}_k = \sum_{r=k+1}^{r=n} (\alpha + 2k)^{2n-2r+2} \overset{r-1}{A}_k + (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2) \sum_{r=k}^{r=n} (\alpha + 2k)^{2n-2r} \overset{r-1}{A}_{k-1}$$

Setzt man im ersten Theile der rechten Seite $r+1$ für r, so hebt er sich gegen die linke, von der nur das letzte Glied übrig bleibt, und man erhält:

$$\overset{n}{A}_k = (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2) \sum_{r=k}^{r=n} (\alpha + 2k)^{2n-2r} \overset{r-1}{A}_{k-1}$$

Für $k = 0$ hat man nach der zweiten recurrirenden Gleichung:

$$\overset{n}{A}_0 = \alpha^2 \overset{n-1}{A}_0 = \alpha^4 \overset{n-2}{A}_0 = \ldots\ldots = \alpha^{2n-2} \overset{1}{A}_0 = \alpha^{2n}$$

Für $k = 1$ erhält man:

$$\overset{n}{A}_1 = (\alpha + 1)\,\alpha \sum_{r=1}^{r=n} (\alpha + 2)^{2n-2r}\, \alpha^{2r-2}$$

$$= (\alpha + 1)\,\alpha\,(\alpha + 2)^{2n-2} \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2}\right)^{2r-2}$$

$$= (\alpha + 1)\,\alpha\,(\alpha + 2)^{2n-2} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)^{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\alpha\,[(\alpha + 2)^{2n} - \alpha^{2n}]$$

Für $k = 2$ erhält man:

$$\overset{n}{A}_2 = (\alpha + 3)(\alpha + 2) \sum_{r=2}^{r=n} (\alpha + 4)^{2n-2r} \overset{r-1}{A}_1$$

Setzt man für den letzten Factor seinen Werth, und summirt die dadurch entstehenden zwei geometrischen Reihen, so findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$\overset{n}{A}_2 = \frac{1}{32} [(\alpha + 1)\,\alpha\,(\alpha + 4)^{2n} - 2\,(\alpha + 2)\,\alpha\,(\alpha + 2)^{2n} + (\alpha + 3)\,\alpha\,\alpha^{2n}]$$

Aus dieser Entwickelung sieht man, dass die Reihen, durch welche die A dargestellt werden, nach den Potenzen α^{2n}, $(\alpha + 2)^{2n}$, $(\alpha + 4)^{2n}$, etc. fortschreiten. Wir wollen daher setzen:

$$\overset{n}{A}_k = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{k+h} \overset{k}{B}_h (\alpha + 2h)^{2n}$$

und die Grössen B so zu bestimmen versuchen, dass die A den drei recurrirenden Gleichungen genügen. Führt man den angenommenen Werth der letztern in die erste recurrirende Gleichung ein, so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{k+h} \overset{k}{B}_h (\alpha + 2h)^{2n+2} =$$

$$(\alpha + 2k)^2 \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{k+h} \overset{k}{B}_h (\alpha + 2h)^{2n}$$

$$+ (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2) \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{k+h+1} \overset{k-1}{B}_h (\alpha + 2h)^{2n}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$\overset{k}{B}_h \left[(\alpha + 2h)^2 - (\alpha + 2k)^2 \right] = - (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2) \overset{k-1}{B}_h$$

gesetzt wird. Daraus ergiebt sich:

$$\overset{k-1}{B}_h = \frac{(\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 2)}{4(k - h)(\alpha + k + h)} \overset{k-1}{B}_h$$

Setzt man nach einander k, $k-1$, $k-2$, etc. ... $h+1$ für k, und multiplicirt alle diese Gleichungen, so erhält man:

$$\overset{k}{B}_h = 4^{h-k} \overset{h}{B}_h \times \frac{(\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 1) \ldots (\alpha + 2h)}{1 \,.\, 2 \ldots (k - h)(\alpha + k + h)(\alpha + k + h - 1) \ldots (\alpha + 2h + 1)}$$

$$= 4^{h-k} \overset{h}{B}_h \frac{\alpha + 2h}{\alpha + 2k} (\alpha + 2k)_{k-h}$$

Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck für $\overset{n}{A}_k$, so kommt:

$$\overset{n}{A}_k = \frac{(-1)^k}{4^k(\alpha + 2k)} \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h 4^h \overset{h}{B}_h (\alpha + 2k)_{k-h} (\alpha + 2h)^{2n+1} \quad (56)$$

Führt man nun diesen Werth in die zweite recurrirende Gleichung ein, so hat man $h = k = 0$ zu setzen, und es kommt:

$$\overset{n+1}{A}_0 = \frac{1}{\alpha} \overset{0}{B}_0 \alpha^{2n+3} =$$

$$\alpha^2 \overset{n}{A}_0 = \frac{\alpha^2}{\alpha} \overset{0}{B}_0 \alpha^{2n+1}$$

Hieraus sieht man erstens, dass diese Gleichung für jeden Werth von $\overset{h}{B}_h$ erfüllt wird, und zweitens, weil

$$\overset{n}{A}_0 = \alpha^{2n}$$

ist, dass $\overset{0}{B}_0 = 1$ sein muss.

Nun bleibt noch übrig, die $\overset{h}{B}_h$ so zu bestimmen, dass die A die dritte recurrirende Gleichung erfüllen. Zieht man diese von der ersten ab, nachdem man daselbst $n+1$ für k gesetzt hat, so bleibt:

$$\overset{n}{A}_{n+1} = 0$$

Da nun der gefundene Ausdruck die erste Gleichung für jedes noch so grosse k erfüllt, so kann man an die Stelle der dritten die eben aufgestellte setzen. Führt man den Ausdruck der A in diese Gleichung ein, so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=n+1} (-1)^h \, 4^h \, \overset{h}{B}_h (\alpha + 2n + 2)_{n-h+1} (\alpha + 2h)^{2n+1} = 0 \quad (57)$$

Setzt man nach der Reihe $n = 0, 1, 2, \ldots$ und für $\overset{0}{B}_0$ seinen Werth, so kommt:

$$(\alpha+2)\,\alpha - 4\overset{1}{B}_1 (\alpha+2) = 0$$

$$(\alpha+4)_2\,\alpha^3 - 4\overset{1}{B}_1 (\alpha+4)_2 (\alpha+2)^3 + 4^2 \overset{2}{B}_2 (\alpha+4)^3 = 0$$

$$(\alpha+6)_3\,\alpha^5 - 4\overset{1}{B}_1 (\alpha+6)_2 (\alpha+2)^5$$
$$+ 4^2 \overset{2}{B}_2 (\alpha+6)(\alpha+4)^5 - 4^3 \overset{3}{B}_3 (\alpha+6)^5 = 0$$

Entwickelt man hieraus die Werthe von $\overset{1}{B}_1$, $\overset{2}{B}_2$, $\overset{3}{B}_3$, so ergiebt sich:

$$\overset{1}{B}_1 = 4^{-1}\,\alpha$$

$$\overset{2}{B}_2 = 4^{-2}\,(\alpha+1)_2$$

$$\overset{3}{B}_3 = 4^{-3}\,(\alpha+2)_3$$

so dass man setzen kann:

$$\overset{h}{B}_h = 4^{-h}(\alpha + h - 1)_h \quad (58)$$

Um zu zeigen, dass dieser Werth die Gleichung (56) befriedigt, setzen wir zur Abkürzung:

$$\sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h-1)_h (a+2h)^{2n+1} \qquad (59)$$

$$= f(a, k, n)$$

so ist zu beweisen, dass

$$f(a, n+1, n) = 0$$

ist. Nun hat man:

$$(a+h-1)_h = (a+h)_{h-1} \frac{a(a+1)}{h(a+h)}$$

$$(a+2h)^2 = a^2 + 4h(a+h)$$

folglich:

$$(a+h-1)_h (a+2h)^{2n+1} =$$
$$(a+2h)^{2n-1} [a^2 (a+h-1)_h + 4a(a+1)(a+h)_{h-1}]$$

Führt man diess in Gleichung (59) ein, und zerlegt die Summe in zwei den beiden Gliedern der Klammer entsprechende Theile, so erhält man:

$$f(a, k, n) =$$
$$a^2 \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h-1)_h (a+2h)^{2n-1}$$
$$+ 4a(a+1) \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h)_{h-1} (a+2h)^{2n-1}$$

Der erste Theil ist $= a^2 f(a, k, n-1)$; setzt man im zweiten, dessen erstes Glied verschwindet $h+1$ für h, so kommt:

$$f(a, k, n) = a^2 f(a, k, n-1)$$
$$- 4a(a+1) \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h (a+2k)^{k-h-1} (a+h+1)_h (a+2h+2)^{2n-1}$$

das ist:

$$f(\alpha, k, n) = \alpha^2 f(\alpha, k, n-1) - 4\alpha(\alpha+1) f(\alpha+2, k-1, n-1)$$

Hieraus folgt, dass sich $f(\alpha, k, n)$ in eine Reihe entwickeln lässt, wo jedes Glied einen Factor von der Form $f(\alpha', k', 0)$ hat, wo $k' > 0$ ist, vorausgesetzt, dass $k > n$ ist. Folglich verschwindet $f(\alpha, k, n)$ für $k > n$, wenn allgemein $f(\alpha', k' 0) = 0$ ist. Nun hat man:

$$f(\alpha, k, 0) = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (\alpha+2k)_{k-h} (\alpha+h-1)_h (\alpha+2h)$$
$$- \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (\alpha+2k)_{k-h} (\alpha+h)_h \frac{k-h}{k} \cdot \alpha$$
$$- \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (\alpha+2k)_{k-h+1} (\alpha+h-1)_{h-1} \frac{k-h+1}{k} \cdot \alpha$$

Denn, was die zwei hinzugefügten Summen betrifft, so sieht man, wenn man in der letztern $h+1$ für h setzt, auf der Stelle, dass sie sich gegenseitig heben. Man kann indessen, da die Grenzen aller drei Summen übereinstimmen, die Gleichung auch so schreiben:

$$f(\alpha, k, 0) = \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h [(\alpha+2k)_{k-h} (\alpha+h-1)_h (\alpha+2h)$$
$$- (\alpha+2k)_{k-h} (\alpha+h)_h \frac{k-h}{k} \cdot \alpha$$
$$- (\alpha+2k)_{k-h+1} (\alpha+h-1)_{h-1} \frac{k-h+1}{k} \cdot \alpha]$$
$$= \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (\alpha+2k)_{k-h} (\alpha+h-1) \quad \times$$

$$\left[\frac{a+2h}{h} - \frac{a+h}{h}\,\frac{k-h}{k} - \frac{a+k+h}{k}\right]$$

Da der Ausdruck in der Klammer $= 0$ ist, so ist:

$$f(a, k, 0) = 0$$

folglich ist, wie wir gesehen haben,

$$f(a, k, n) = 0 \quad \text{für} \quad k > n$$

folglich auch:

$$f(a, n+1, n) = 0$$

was zu beweisen war.

Führt man aus Gleichung (58) den Ausdruck der B in die Gleichung (56) ein, so kommt:

$$\overset{n}{A}_k = \frac{(-1)^k}{4^k(a+2k)} \times \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h-1)_h (a+2h)^{2n+1}$$

und substituirt man diesen Ausdruck in die Gleichung (55), so erhält man:

$$\frac{d^{2n} \sec^a x}{dx^{2n}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sec^{a+2k} x}{4^k(a+2k)} \times \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h-1)_h (a+2h)^{2n+1}$$

Differenziirt man die Gleichung, so kommt:

$$\frac{d^{2n+1} \sec^a x}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \, tg\, x \sum_{k=0}^{k=n} 4^{-k} \sec^{a+2k} x \times \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (a+2k)_{k-h} (a+h-1)_h (a+2h)^{2n+1}$$

Für $\alpha = 1$ werden beide Gleichungen:

$$\frac{d^{2n} \sec x}{d x^{2n}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sec^{2k+1} x}{4^k (2k+1)} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (2k+1)_{k-h} (2h+1)^{2n+1}$$

$$\frac{d^{2n+1} \sec x}{d x^{2n+1}} = (-1)^n \, tg\, x \sum_{k=0}^{k=n} 4^{-k} \sec^{2k+1} x \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k} (-1)^h (2k+1)_{k-h} (2h+1)^{2n+1}$$

Zwei andere Formeln für die Secante ergeben sich aus den allgemeinern im X. und XXIII. Capitel, nämlich:

$$\frac{d^n \sec x}{d x^n} = 2^{n+1} \left(n + \frac{1}{2m}\right) \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h n_h \frac{\sec^{2hm+1} x}{2hm+1} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p} \, p^n \cos\left(2px + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n \sec x}{d x^n} = (\mu+1)(m+\mu+\nu+1)_{\mu+1} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu} (-1)^k \frac{2^{k+\mu}}{k+\mu+1} \sec^{k+\mu+1} x \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h \, (2h-k-\mu)^n \cos\left[(2h-k-\mu)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

Die erste Formel für die Tangente ist von **Pfaff** aufgestellt worden, und findet sich an der angeführten Stelle in **Hindenburg's** Sammlung comb. Abh. Die Herleitung ist auf die Summation einer unendlichen Reihe gegründet, deren Ausführung uns zu weit führen würde; wir wollen uns daher mit dem Beweise der Formel begnügen; sie lautet:

$$\frac{d^{2n} \operatorname{tg} x}{dx^{2n}} = \frac{2(-1)^n}{\cos^{2n+1} x} \sum_{k=1}^{k=n} \sin(2k-1)x \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=2n-k+1} (-1)^h \, (2n+1)_{n-k-h+1} \, h^{2n}$$

$$\frac{d^{2n+1} \operatorname{tg} x}{dx^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{\cos^{2n+2} x} \sum_{k=-n}^{k=n} \cos 2kx \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n-k} (-1)^h \, (2n+2)_{n-k-h} \, h^{2n+1}$$

Man kann indessen beide Ausdrücke unter einer gemeinschaftlichen Form begreifen, nämlich:

$$\frac{d^n \operatorname{tg} x}{dx^n} = \frac{-1}{\cos^{n+1} x} \sum_{k=0}^{k=n} \sin\left[(2k-n+1)x + \frac{n\pi}{2}\right] \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k+1} (-1)^h \, (n+1)_{k-h+1} \, h^n$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\overset{n}{A}_k = \sum_{h=1}^{h=k+1} (-1)^h \, (n+1)_{k-h+1} \, h^n \tag{60}$$

so ist zu beweisen, dass

$$\frac{d^n \, tg\, x}{dx} = - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\overset{n}{A}_k}{cos^{n+1} x} \, sin \left[(2k - n + 1)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

ist; oder, was dasselbe ist, dass dieser Ausdruck seine Form behält, wenn man ihn nochmals differenziirt; denn für $n = 1$ ist er richtig, indem man erhält:

$$\frac{d\, tg\, x}{dx} = - \frac{\overset{1}{A}_0}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Differenziirt man die Gleichung, so kommt:

$$\frac{d^{n+1} \, tg\, x}{dx^{n+r}} = - \sum_{k=0}^{k=n} \overset{n}{A}_k \, cos^{-n-2} x \times$$

$$\left[(n+1) \, sin\, x \, sin \left[(2k - n + 1)x + \frac{n\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left. + (2k - n + 1) \, cos\, x \, cos \left[(2k - n + 1)x + \frac{n\pi}{2}\right]\right]$$

Der Ausdruck in der Klammer ist:

$$= \frac{n+1}{2} \left[cos\left[(2k-n)x + \frac{n\pi}{2}\right] - cos\left[(2k-n+2)x + \frac{n\pi}{2}\right]\right]$$

$$+ \frac{2k-n+1}{2} \left[cos\left[2k-n)x + \frac{n\pi}{2}\right] + cos\left[(2k-n+2)x + \frac{n\pi}{2}\right]\right]$$

$$= (k+1) \, cos \left[(2k-n)x + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$$- (n-k) \, cos \left[(2k - n+2)x + \frac{n\pi}{}\right]$$

$$= (k+1) \sin\left[(2k-n)x + \frac{n+1}{2}\pi\right]$$

$$-(n-k) \sin\left[(2k-n+2)x + \frac{n+1}{2}\pi\right]$$

Substituirt man diesen Werth, und setzt im zweiten Theile $k-1$ für k, so kommt:

$$\frac{d^{n+1}\, tg\, x}{d x^{n+1}} = -\cos^{-n-2} x \times$$

$$\left[\sum_{k=0}^{k=n} (k+1) \overset{n}{A}_k \sin\left[(2k-n)x + \frac{n+1}{2}\pi\right]\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=n+1} (n-k+1) \overset{n}{A}_{k-1} \sin\left[(2k-n)x + \frac{n+1}{2}\pi\right]\right]$$

Dieselbe Grösse soll auch

$$= -\cos^{-n-2} x \sum_{k=0}^{k=n+1} \overset{n+1}{A}_k \sin\left[(2k-n)x + \frac{n+1}{2}\pi\right]$$

sein, was der Fall ist, wenn zugleich

$$\overset{n+1}{A}_k = (k+1)\overset{n}{A}_k - (n-k+1)\overset{n}{A}_{k-1}$$

$$\overset{n+1}{A}_0 = \overset{n}{A}_0$$

$$\overset{n+1}{A}_{n+1} = 0$$

ist. Es ist daher nur noch zu beweisen, dass der Ausdruck der A in Gleichung (60) diese Gleichungen befriedigt. Führt man ihn in die erste ein, so kommt:

$$\sum_{h=1}^{h=k+1} (-1)^h (n+2)_{k-h+1} h^{n+1} =$$

$$(k+1)\sum_{h=1}^{h=k+1}(-1)^h\,(n+1)_{k-h+1}\,h^n$$

$$-\,(n-k+1)\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^h\,(n+1)_{k-h}\,h^n$$

oder

$$\sum_{h=1}^{h=k+1}(-1)^h\,h^n\Big[h\,(n+2)_{k-h+1}-(k+1)\,(n+1)\,(n+1)_{k-h+1}$$

$$+\,(n-k+1)\,(n+1)_{k-h}\Big]=0$$

Die Grösse in der Klammer ist

$$=(n+1)_{k-h}\,\frac{1}{k-h+1}\times$$

$$[(n+2)\,h-(k+1)\,(n-k+h+1)+(n-k+1)\,(k-h+1)]$$

$$=0$$

Folglich wird die erste der drei Gleichungen befriedigt. Die zweite wird es, insofern $\overset{n}{A}_0=-1$, also unabhängig von n ist. Die dritte erfordert, dass

$$\sum_{h=1}^{h=n+2}(-1)^h\,(n+2)_{n-h+2}\,h^{n+1}=0$$

oder, was dasselbe ist, dass

$$\sum_{h=1}^{h=n+2}(-1)^h\,(n+2)_h\,h^{n+1}=0$$

ist. Diess ist nach einer bekannten Formel der Fall; ausserdem erhellt es sogleich, wenn man die identische Gleichung

$$(1-e^x)^{n+2} = \sum_{h=0}^{h=n+2} (-1)^h \, (n+2)_h \, e^{hx}$$

$n+1$ mal nach x differenziirt, und alsdann $x=0$ setzt, wodurch die linke Seite wegen des Factors $1-e^x$ verschwindet. Hiermit ist die aufgestellte Formel vollständig bewiesen, und da, wie wir gesehen haben, $\overset{n}{A}_0 = 0$ ist, so kann man das letzte Glied der zweiten Summe weglassen, und erhält:

$$\frac{d^n \, tg\, x}{d\,x^n} = \frac{-1}{cos^{n+1} x} \sum_{k=0}^{k=n-1} sin\left[(2k-n+1)x + \frac{n\pi}{2}\right] \times$$
$$\sum_{h=1}^{h=k+1} (-1)^h \, (n+1)_{k-h+1} \, h^n$$

Diese Formel ist wesentlich dieselbe wie die, welche Scherk im 4. Bande vom Crell. Journ. pag. 303 giebt, nämlich:

$$\frac{d^n \, tg\, x}{d\,x^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{cos^{n+1} x} \sum_{k=1}^{k=n} cos\,(2k-n-1)\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \times$$
$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+k} \, (n+1)_{k-h} \, h^n$$

Die Formel von Gudermann lässt sich aus der verallgemeinerten Formel für die Secante ableiten. Es war nämlich

$$\frac{d^n \, tg\, x}{d\,x^n} = \frac{d^{n-1} \,.\, sec^2\, x}{d\,x^{n-1}}$$

Setzt man demnach in den zwei ersten Formeln dieses Capitels $a=2$, und $n-1$ für n, so erhält man, indem man zugleich um der grösseren Kürze des Ausdrucks willen $h-1$ und $k-1$ für h und k setzt,

$$\frac{d^{2n}\, tg\, x}{d x^{2n}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{4^{n-k}}{k}\, sec^{2k} x \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h\, (2k)_{k-h}\, h^{2n}$$

$$\frac{d^{2n+1}\, tg\, x}{d x^{2n+1}} = (-1)^n\, 2\, tg\, x \sum_{k=1}^{k=n} 4^{n-k}\, sec \quad x \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h\, (2k)_{k-h}\, h^{2n}$$

Auf dieselbe Art erhält man aus den genannten Gleichungen im X. und XXIII. Capitel:

$$\frac{d^n\, tg\, x}{d x^n} = 2^{n+1} \left(n - 1 + \frac{1}{m}\right)_{n-1} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h\, (n-1)_h\, \frac{sec^{2hm+2}}{hm+1} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (2hm)_{hm-p}\, p^{n-1}\, cos\left(2 p x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$\frac{d^n\, tg\, x}{d x^n} = (\mu + 2)\, (n + \mu + \nu + 1)_{\mu+2} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu-1} (-1)^k\, (n + \nu - 1)_k\, \frac{2-k-\mu}{k+\mu+2}\, sec^{k+\mu+2} x \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h\, (2h - k - \mu)^{n+1} cos\left[(2h - k - \mu)\, x + \frac{n-1}{2}\pi\right]$$

Es ist bekannt, dass man von den Kreisfunctionen zu den Exponentialfunctionen übergehen kann, indem man ix für x setzt, und dass sich durch diese Substitution die höhern Differentialformeln für dieselben Exponentialfunctionen aus denen für die Kreisfunctionen ableiten lassen. Die so erhaltenen Ausdrücke sind den ursprünglichen nicht nur durch ihre übereinstimmenden Coefficienten ähnlich, sondern sie werden auch für $x = 0$ mit ihnen identisch bis auf ihr Vorzeichen. Solche entsprechende Fnnctionen sind z. B.:

$$\sec x \quad \text{und} \quad \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$tg\, x \quad \text{und} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Da man indessen durch diese Umsetzung nur sehr specielle Ausdrücke erhält, die sich leicht unter allgemeinern Formen begreifen lassen, so mag es genügen, diese öfters angewandte Methode erwähnt zu haben; und wir wollen nur noch von einer unabhängig hergeleiteten Formel für eine hierher gehörige Function, nämlich $l(a + e^x)$, reden, welche in der im XXI. Capitel genannten Schrift von Scherk als ein Beispiel der Anwendung der eben daselbst beschriebenen Methode aufgestellt ist. Bei der genannten Function kann man diess Verfahren auf doppelte Weise anwenden. Differenziirt man sie, und sondert jedesmal den Factor e^{-x} ab, so erhält man:

$$\frac{dl(a+e^x)}{dx} = \frac{1}{1 + ae^{-x}}$$

$$\frac{e^x\, d\, dl(a + e^x)}{dx^2} = \frac{a}{(1 + ae^{-x})^2}$$

$$\frac{(e^x d)^2\, dl(a + e^x)}{dx^3} = \frac{1\,.\,2\,.\,a^2}{(1 + ae^{-x})^3}$$

etc. und allgemein:

$$\frac{(e^x d)^k\, dl(a + e^x)}{dx^{k+1}} = \frac{1\,.\,2 \ldots k\, a^k}{(1 + ae^{-x})^{k+1}}$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{-kx}}{1\,.\,2 \ldots k} \frac{(e^x d)^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

ein, wo man

$$y = \frac{d\,l(a+e^x)}{dx}$$

und $n-1$ für n zu setzen hat, so erhält man:

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} =$$

$$(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k e^{-kx}}{(1+ae^{-x})^{k+1}}, \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^{n-1}$$

Statt dessen kann man zweitens nach jeder Differenziation den Factor e^x absondern; dann erhält man:

$$\frac{e^{-x}\,d\,l(a+e^x)}{dx} = \frac{1}{a+e^x}$$

$$\frac{(e^{-x}d)^2\, l(a+e^x)}{dx^2} = -\frac{1}{(a+e^x)^2}$$

$$\frac{(e^{-x}d)^3\, l(a+e^x)}{dx^3} = \frac{1\,.\,2}{(a+e^x)^3}$$

etc. und allgemein:

$$\frac{(e^{-x}d)^k\, l(a+e^x)}{dx^k} = \frac{(-1)^{k+1}\, 1\,.\,2\ldots(k-1)}{(a+e^x)^k}$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k e^{kx}}{1\,.\,2\ldots k} \frac{(e^{-x}d)^k y}{dx^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^h k_h h^n$$

ein, indem man $y = l(a+e^x)$ setzt, so erhält man:

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{e^{kx}}{k(a+e^x)^k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} k_h h^n$$

Für dieselbe Grösse erhält man Ausdrücke aus den Formeln für Exponentialfunctionen im X. und XXIII. Capitel, indem man, mit

Berücksichtigung von Gleichung (61) in der erstern $\alpha = -1$, $c = a$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, in der letztern $m = 1$, $c = a$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$ setzt, und in beiden n um 1 vermindert; nämlich:

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} = (-1)^{n+1} \left(n-1+\frac{1}{m}\right)_{n-1} \times$$

$$\sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h (n-1)_h \frac{(1+ae^{-x})^{-hm-1}}{hm+1} \times$$

$$\sum_{p=1}^{p=hm} (hm)_p \, a^p \, p^{n-1} \, e^{-px}$$

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} = (-1)^{n+1} (\mu+1) (n+\mu+n)_{\mu+1} \times$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+\nu-1} (-1)^k (n+\nu-1)_k \frac{(1+ae^{-x})^{-k-\mu-1}}{k+\mu+1} \times$$

$$\sum_{h=0}^{h=k+\mu} (k+\mu)_h \, a^h \, h^{n-1} \, e^{-hx}$$

Bei der Vergleichung der hier zusammengestellten Formeln für dieselben drei Functionen tritt folgender durchgehende Unterschied zwischen den aus der Theorie entsprungenen und den auf andere Weise gewonnenen hervor, um dessentwillen eine Uebereinstimmung nicht wohl denkbar ist. Jene entwickeln die betreffenden Grössen nach den absteigenden Potenzen der im Nenner erscheinenden Grössen $\cos x$, $a + e^x$; diese setzen sogleich die höchste Potenz derselben als gemeinschaftlichen Nenner, da die Entfernung desselben die Entwickelung erleichtert. Dass die aus dem Scherk'schen Theorem hervorgehenden Ausdrücke die erstere Form annehmen müssen, ist aus der Herleitung klar.

Druck von Hirschfeld in Leipzig.



